REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **2 H** Coefficient : **2**
Section : **Économie et Gestion**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Le sujet comporte 04 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -1 + \ln x$.
   Si F est la primitive de f qui s'annule en e, alors pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

a) $F(x) = x\ln x - x$ b) $F(x) = x\ln x - 2x + e$ c) $F(x) = x\ln x - e$

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 1 + e^x$.
   Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(2x)$, alors on a:

a) $g'(x) = 1 + e^{2x}$ b) $g'(x) = e^{2x}$ c) $g'(x) = 2 + 2e^{2x}$

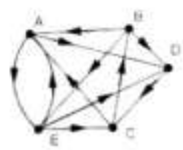
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^n te^{-2t}dt$

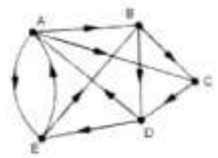
a) est croissante b) est décroissante c) n'est pas monotone

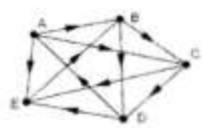
4. On considère un graphe orienté G de sommets A, B, C, D et E, dans cet ordre, dont la matrice

associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le graphe G peut être schématisé par :

a) 

b) 

c) 

Exercice 2 : (5,5 points)

On donne les deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Calculer le déterminant de la matrice A .

   b) En déduire que A est inversible.

2. a) Calculer $A(A-2I_3)$.

b) En déduire que $A^{-1} = 2I_3 - A$, puis vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. a) Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système $(S): \begin{cases} -x+y-z=1 \\ -2x+2y-z=-1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$

b) Déterminer les valeurs des trois réels strictement positifs u, v et w vérifiant le système suivant :

$$(S'): \begin{cases} -\ln u+\ln v-\ln w=1 \\ \ln\left(\dfrac{v^2}{u^2 w}\right)= -1 \\ \ln\left(\dfrac{u^2 w^2}{v}\right)=1 \end{cases}$$

Exercice 3 : (5,5 points)

Le tableau suivant donne le pourcentage des familles tunisiennes possédant au moins un ordinateur :

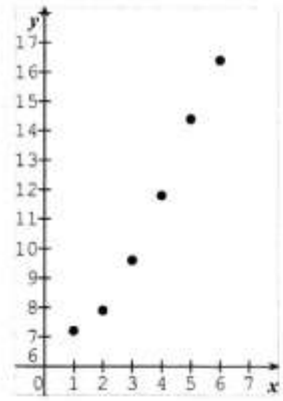
Année i	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Pourcentage y_i des familles	7,2	7,9	9,6	11,8	14,4	16,4

Source : Institut national des statistiques

(Les valeurs demandées seront données à 10^{-2} près).

1. Déterminer $\overline{x}$, $\overline{y}$ et σ_x .

2. Le nuage de points de la série statistique (x_i, y_i) représenté ci-contre suggère un ajustement exponentiel. On pose alors, $z_i = \ln(y_i)$ pour tout $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.



a) La droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation : $z = \propto x + \beta$.

Donner les expressions de $\propto$ et β en fonction de $\text{cov}(x,z)$, σ_x , $\overline{x}$ et $\overline{z}$.

b) Compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i			2,26			2,80

c) Donner les valeurs de $\overline{z}$ et $\text{cov}(x,z)$ et en déduire les valeurs de $\propto$ et β.

3. a) Déterminer σ_z et $r(x,z)$. Justifier alors, le choix de l'ajustement linéaire de z en x.

b) Vérifier que $y = ae^{bx}$ (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près pour chacun des réels a et b).

c) D'après cet ajustement, quel serait le pourcentage des familles tunisiennes ayant au moins un ordinateur en 2015 ?

<u>Exercice 4 :</u> (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne dans l'annexe ci-jointe (feuille à rendre avec la copie) la courbe représentative (C) d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

* α est l'unique réel non nul tel que $f(\alpha) = \alpha$.

* La courbe (C) admet :

- une asymptote d'équation $y = \frac{1}{4}$ au voisinage de $-\infty$.

- une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

- une seule tangente horizontale à l'origine du repère.

1. Par lecture graphique donner :

   a) $f(0)$ et $f'(0)$.

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $g(x)= f(x)$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

   b) Tracer, sur l'annexe, la courbe représentative (C') de g^{-1}.

3. Dans la suite, on suppose que $f(x) = \left(\frac{e^x-1}{2}\right)^2$.

   a) Vérifier que pour tout réel x on a : $x - f(x) = \frac{1}{4}(4x - 1 + 2e^x - e^{2x})$.

   b) Calculer, en fonction de α, l'aire A de la région du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = \alpha$.

Annexe (feuille à rendre avec la copie)