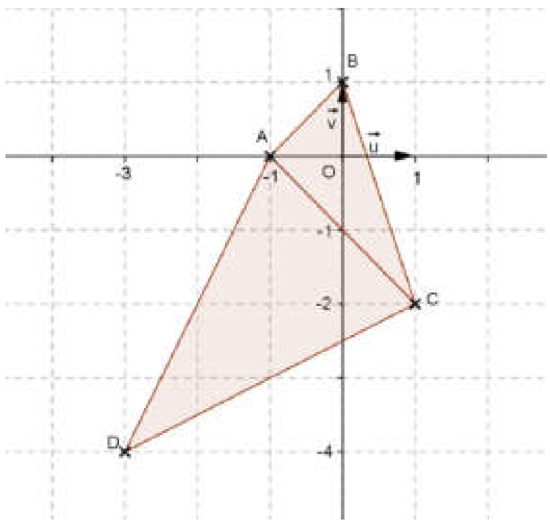
Section: Sciences de l'informatique *Session de contrôle 2011*

Matière : Mathématiques

Exercice 1 **(5 points)**

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes- géométrie.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaitre la nature d'un triangle et les propriétés caractéristiques d'un parallélogramme.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) $z_D = -3 - 4i$



b) $AB = |1+i| = \sqrt{2}$; $AC = |2-2i| = 2\sqrt{2}$; $BC = |1-3i| = \sqrt{10}$

L'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ permet de conclure que ABC est un triangle rectangle en A. (D'après le théorème de Pythagore).

On montre de même que $DA = DC = 2\sqrt{5}$ et on en déduit que ACD est un triangle isocèle de sommet principal D. ($AC = 2\sqrt{2} \neq 2\sqrt{5}$)

2) a) ABMN est un parallélogramme si et seulement si

$$\begin{cases} \text{A, B, M et N ne sont pas alignés} & (1) \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM} \quad \left(\text{ou [AM] et [BN] ont même milieu}\right) & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ $1+i = z - z^2$ $\Leftrightarrow$ $z^2 - z + 1 + i = 0$

b) $z^2 - z + 1 + i = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (1-2i)^2$

On trouve $z = i$ ou $z = 1 - i$

- Si $z = i$ alors $M = B$ et $N = A$ par suite ABMN n'est pas un parallélogramme.

- Si $z = 1 - i$ alors ABMN est un parallélogramme.

<u>Exercice 2</u> (5points)

- ✓ **Contenu :** Déterminant d'une matrice d'ordre3, inverse d'une matrice d'ordre3, système linéaire 3×3.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer le déterminant d'une matrice d'ordre3, reconnaitre l'inverse d'une matrice d'ordre3, résoudre un système linéaire 3×3.
- ✓ **Corrigé :**

1) DétA = $1 \neq 0$ alors la matrice A est inversible.
2) a) Pour tout réel α , det $\mathbf{M}_\alpha = \square \neq 0$ alors $\mathbf{M}_{\square}$ est inversible.

   b) $A \times \mathbf{M}_{\square} = \mathbf{I}_{\square}$ équivaut $\begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On trouve $\alpha = 1$ et par suite $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3) (S) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $S_{IR^3} = \{(1,-1,1)\}$

<u>Exercice 3</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Arithmétique
- ✓ **Aptitudes visées :** Modéliser une situation par une équation du type: ax + by = c, connaitre et applique la formule relative à la somme des termes d'une suite géométrique, connaitre et utiliser les propriétés de la divisibilité dans Z, calculer le pgcd de deux entiers, reconnaitre que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans Z^2, des équations du type: ax + by = c.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) S_n est la somme des (n+1) premiers termes de la suite géométrique de raison 4 et de premier terme 1.

   $S_n = \frac{4^{n+1}-1}{4-1} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$ (1)

   (1) $\Leftrightarrow$ $4^{n+1} - 3S_n = 1$

   b) On remarque que $256 = 4^{3+1}$ *et* $85 = S_3$.

   On sait que $4^{3+1} - 3S_3 = 1$ (d'après a)) ; alors on en déduit que (1,3) est une solution particulière de l'équation 256x-85y=1. (1)

   On trouve $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(85k+1, 256k+3), k \in \mathbb{Z}\}$
2) On désigne par x le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et par y celui d'un ordinateur portable. Alors 256x – 5 = 85y ou bien 256x – 85y = 5 (2)

   On remarque d'après 1) b) que x = 5(85k+1) et y = 5(256k+3) , $k \in \mathbb{Z}$.

   $400 \leq x \leq 500$ équivaut $400 \leq 85k+5 \leq 500$.

   On trouve k = 5 et par suite x = 430 D et y = 1295 D.

<u>Exercice 4</u> (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter un graphique pour donner : le tableau de variation et le signe d'une fonction, une équation d'une asymptote - Etudier les variations d'une fonction, reconnaitre un axe de symétrie de la courbe, étudier les branches infinies, tracer l'allure de la courbe d'une fonction.
- ✓ **Corrigé :**

1) a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

b) f admet un minimum absolu en 2 qui est 1 ; alors pour tout réel x, $f(x) \geq 1$ et par suite $f(x) > 0$.

c) (AB) : $y = x - 3$.

2) a) f est dérivable sur IR et pour tout réel x, $f(x) > 0$; alors $g = \ln o f$ est définie et dérivable sur IR.

b) Pour tout réel x, $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g '(x)		−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) a) Pour tout réel x, $g(4-x) = \ln[f(4-x)] = \ln[f(x)] = g(x)$.
Alors la droite D : $x = 2$ est un axe de symétrie de C_g.

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[f(x)]}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x} = 0$

Alors la courbe C_g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

c) L'allure de C_g se traduit par les variations de g en précisant les branches paraboliques dont la direction est celle de l'axe des abscisses et en utilisant la droite D : $x = 2$ comme un axe de symétrie de C_g.