

Matière : Mathématiques

**Exercice 1 (4 points)**

- ✓ **Contenu** : Nombres complexes - géométrie
- ✓ **Aptitudes visées** : Représenter un point connaissant son affixe, déterminer le module d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, connaître la nature d'un triangle.
- ✓ **Corrigé** :

1- a)  $i^3 + i \cdot i^2 - 2i + 4i = -i - i - 2i + 4i = 0$  donc  $i$  est une solution de ( E ) .

b) Comme  $i$  est une solution de ( E ) alors on peut écrire :

$$z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic$$

$$\begin{cases} b - i = i \\ c - ib = -2 \\ -ic = 4 \end{cases}$$

Par identification ,on obtient  $b = 2i$  et  $c = -4$  .

Par suite  $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = (z - i)(z^2 + 2iz - 4)$

2- a)  $(z - i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$  signifie  $z = i$  ou  $z^2 + 2iz - 4 = 0$  .

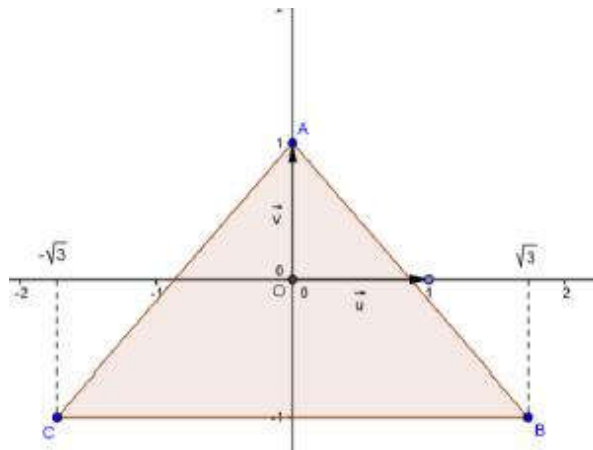
Or  $z^2 + 2iz - 4 = 0$  .  $a=1$  ,  $b=2i=2b'$  signifie  $b'=i$  et  $c=-4$

Donc  $\Delta' = b'^2 - ac = 3$  d'où  $z' = -i + \sqrt{3}$  et  $z'' = -i - \sqrt{3}$

Conclusion :  $S_C = \{ i ; -i + \sqrt{3} ; -i - \sqrt{3} \}$  .

b) Question hors programme. (non notée)

3- a)



b)  $AB = |z_B - z_A| = |-i + \sqrt{3} - i| = |\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$ .

$AC = |z_C - z_A| = |-i - \sqrt{3} - i| = |-\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$ .

Ainsi  $AB = AC$  donc ABC est un triangle isocèle de sommet principale A.

## Exercice 2 (5,5 points)

- ✓ **Contenu** : Déterminant d'une matrice d'ordre 3, inverse d'une matrice d'ordre 3, système linéaire  $3 \times 3$ .
- ✓ **Aptitudes visées** : Modéliser une situation par un système linéaire, calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3, reconnaître l'inverse d'une matrice d'ordre 3, résoudre un système linéaire  $3 \times 3$ .
- ✓ **Corrigé** :

$$1- (S) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 3200 \\ 4x + 2y + 5z = 4600 \\ 3x + y + 3z = 2700 \end{cases}$$

$$2- a) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 12 = 1 \neq 0 \text{ donc } A \text{ est inversible.}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ donc } A^{-1} = B$$

b) Le système (S) équivaut à  $AU = V$  avec  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$   
 Par suite  $AU = V$  signifie  $U = A^{-1}V$  signifie  $U = BV$  signifie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3200 \\ 4600 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

D'où  $x = 200$  dinars ;  $y = 900$  dinars et  $z = 400$  dinars .

## Exercice 3 (4,5 points)

- ✓ **Contenu** : Arithmétique.
- ✓ **Aptitudes visées** : Modéliser une situation par une équation du type  $ax + by = c$ , connaître et utiliser les propriétés de la divisibilité dans  $Z$ , calculer le pgcd de deux entiers, reconnaître que deux entiers sont premiers entre eux, résoudre dans  $Z^2$ , des équations du type  $ax + by = c$ .
- ✓ **Corrigé** :

1- a) Si  $(x, y)$  est solution de (E) alors  $8x + 5y = 100$  signifie  $8x = 100 - 5y = 5(20 - y)$  ce qui donne que 5 divise  $8x$  et comme  $5 \wedge 8 = 1$  donc d'après le théorème de Gauss 5 divise  $x$  c'est-à-dire  $x$  est un multiple de 5.

b) D'après a) si  $(x, y)$  est solution de (E) alors  $x$  est multiple de 5 donc  $x = 5k$ ,  $k \in Z$  on remplace  $x$  dans l'équation (E) on obtient  $8 \times 5k + 5y = 100$  signifie  $8k + y = 20$  d'où  $y = 20 - 8k$ ,  $k \in Z$ .

Réciproquement, pour tout  $k \in Z$  le couple  $(x, y) = (5k, 20 - 8k)$  vérifie l'équation (E)

Conclusion  $S_{Z \times Z} = \{(5k, 20 - 8k) ; k \in Z\}$ .

2- soit  $x$  le nombre de lycéens et  $y$  le nombre de collégiens.

Les composantes possibles de ce groupe vérifient l'équation (E) :  $8x + 5y = 100$  donc d'après 1)  $(x, y) = \{(5k, 20 - 8k), k \in \mathbb{Z}\}$ .

Or  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  donc  $5k > 0$  et  $20 - 8k \geq 0$  ce qui donne  $k > 0$  et  $k \leq \frac{20}{8}$   
Ainsi  $k \in \{1, 2\}$ .

Conclusion :  $(x, y) \in \{(5, 12); (10, 4)\}$ .

#### Exercice 4 (6 points)

- ✓ **Contenu** : Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, tangente à une courbe en un point, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées** : Lire un tableau de variation d'une fonction, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction, reconnaître une équation de la tangente à une courbe en un point, identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan.

✓ **Corrigé** :

1- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

b)  $A(1, 1) \in C$  signifie  $f(1) = 1$

$T : y = x$  est la tangente à  $C$  au point  $A(1, 1)$  donc  $f'(1) = 1$ .

2- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0$ .

Ainsi  $f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0$  et par suite  $C$  admet une demi tangente horizontale à dirigée à droite au point  $O$ .

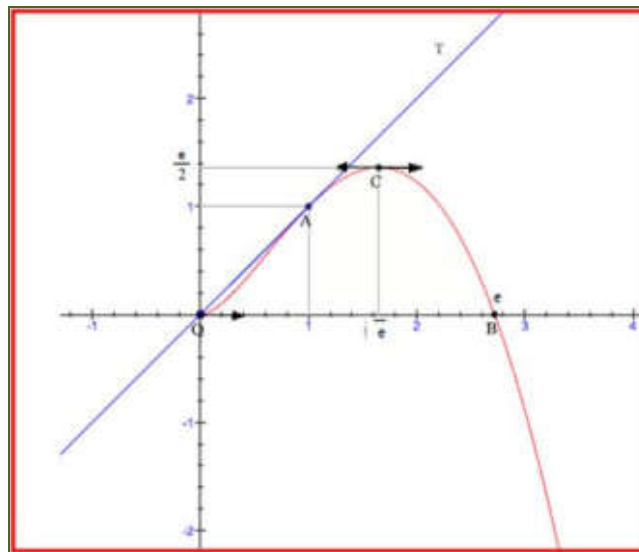
b) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$ .

donc  $C$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$ .

c)  $f(x) = 0$  signifie  $x = 0$  ou  $(1 - \ln x) = 0$  signifie  $x = 0$  ou  $\ln x = 1$  signifie  $x = 0$  ou  $x = e$ .

Conclusion :  $C \cap (Ox) = \{O(0, 0); B(e, 0)\}$ .

d)



$$3- A = \int_1^e (1 - \ln x) x^2 dx = \dots$$

A l'aide d'une intégration par partie, on pose :  $u(x) = 1 - \ln x$  et  $v'(x) = x^2$

donc  $u'(x) = -\frac{1}{x}$  et  $v(x) = \frac{1}{3} x^3$ , ce qui donne :

$$A = \left[ \frac{1}{3} x^3 (1 - \ln x) \right]_1^e + \frac{1}{3} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^e = \frac{e^3 - 4}{9} \text{ (u.a.)}$$