Section: Sciences Expérimentales ***Session de contrôle 2011***

Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme trigonométrique, exponentielle d'un nombre complexe non nul, interpréter géométriquement l'argument d'un nombre complexe, résoudre une équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes.
- ✓ **Corrigé :**

Répondre par vrai ou Faux en justifiant :

1) Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel : **Vrai**

$\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\in\mathbb{R}$.

2) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z-7+i=0$ sont $1+2i$ et $-1+3i$. : **Faux**

la somme des racine est $z'+z''=1+2i+-1+3i==5i\neq -\frac{b}{a}=6$.

3) Soit z et z' deux nombres complexe non nuls.

Si arg(z') $\arg(z')\equiv-\arg(z)[2\pi]$ alors $z'=\bar{z}$: **Faux**

Si on prend $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z'=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on a alors $\arg(z')\equiv-\arg(z)[2\pi]$ mais $z'\neq z$.

4) L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$ est $2^8e^{i\frac{4\pi}{3}}$: **Vrai**

$\left(\sqrt{3}+i\right)^8=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^8=2^8e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

<u>Exercice 2</u> (5 points)

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation cartésienne d'un plan, représentation paramétrique d'une droite, section d'une sphère par un plan, position relative de deux droites.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la position relative de deux droites, déterminer la section d'une sphère par un plan.

✓ **Corrigé :**

A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3).

1) a/ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$.

b/ On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (ABC) donc (ABC) : $6x+3y+2z+d=0$.

Or A(1,0,0) $\in$(ABC) d'où d= -6, ainsi (ABC) : $6x+3y+2z-6=0$.

2) a/ Représentation paramétrique de Δ et Δ' :

♦ On a $I\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ d'où $\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\\ z=\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

♦ On a $J\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ d'où $\Delta':\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\beta\\ z=\frac{3}{2}\end{cases}$; $\beta\in\mathbb{R}$

b/ Déduisons que $\Delta\cap\Delta'=\left\{\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)\right\}$

♦ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non colinéaires donc Δ et Δ' sont sécantes.

♦ Ω ∈ Δ ($\alpha=\frac{3}{2}$) et Ω ∈ Δ' (β = 1).

Ainsi $\Delta\cap\Delta'=\left\{\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)\right\}$.

3) a/ Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation de la sphère :

$$S:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=O\Omega^2=\frac{7}{2}.$$

(*On peut aussi vérifier que ΩA=ΩB=ΩC=ΩO, cependant on peut remarquer que Δ est perpendiculaire au segment [AB] en son milieu donc contenu dans le plan médiateur du segment [AB] par suite ΩA = ΩB de même ΩA=ΩC*).

b / Rayon du cercle circonscrit au triangle ABC :

♦ On a S $\cap$ (ABC) = $\mathcal{C}_{ABC}$.

♦ d = d(Ω, (ABC)) = $\dfrac{\left|6\times\frac{1}{2}+3\times1+2\times\frac{3}{2}-6\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{3}{7}$.

♦ Le rayon du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ est r = $\sqrt{O\Omega^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{7}{2}-\dfrac{9}{49}}=\dfrac{5\sqrt{26}}{14}$.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques, limites, continuité, dérivabilité, variation, branches infinies, courbe.
- ✓ **Aptitudes visées :** Lire un graphique, déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction, déterminer le sens de variation d'une fonction , identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe.
- ✓ **Corrigé :**

I- On pose $f(x) = e^x - x$.

1) Variations de f :

♦ $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$.

♦ $f'(x) = 0$ signifie $e^x = 1$ signifie $x = 0$.

♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right) = +\infty(+\infty-1) = +\infty$.

x	-ζ	0	+ζ
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	+ζ ↘	1	↗ +ζ

2) Déduisons que pour tout x , $e^x - x \geq 1$

On a d'après le tableau de variation , pour tout x : $f(x) \geq 1$ signifie $e^x - x \geq 1$.

II- 1) a/ ♦ $g(1) = \dfrac{1}{2}$. ♦ $g(2) = 0$. ♦ $g(3) = \dfrac{1}{2}$.

b / ♦ $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ (la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_g.).

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$) voisinage de + ⌘)

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$) au voisiange de + ⌘).

c / Tableau de signe de g'(x) :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

2) On pose $h(x)=e^{g(x)}$.

a) ♦ $h(1)=e^{g(1)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$. ♦ $h(2)=e^{g(2)}=e^{0}=1$ ♦ $h(2)=e^{g(3)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

b/ ♦ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{g(x)}=e^{+\infty}=+\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{g(x)}=e^{+\infty}=+\infty$

c / ♦ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{g(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)}\dfrac{g(x)}{x}$

♦ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x}=+\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)}=+\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}=+\infty$.

Ainsi C_h admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j}\,)$ au voisinage de $+\infty$.

d / tableau de variation de h :

♦ h'(x) = $\left(e^{g(x)}\right)'$=g'(x) $e^{g(x)}$, ainsi le signe de h'(x) est celui de g'(x) puisque $e^{g(x)} > 0$.

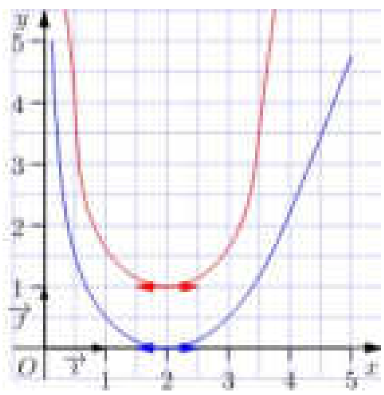
x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
h	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) Soit $\alpha > 0$, $M(\alpha, g(\alpha))$ et $N(\alpha, h(\alpha))$.

a / MN =

$|h(\alpha)-g(\alpha)|=|e^{g(\alpha)}-g(\alpha)|=|f(g(\alpha)|=f(g(\alpha))$

(car pour tout x, f(x) >0).



b / MN est minimale signifie que $f(g(\alpha))$ est minimale signifie $g(\alpha)=0$ signifie $\alpha = 2$.

4) Courbe de C_h.

♦ C_h admet une branche parabolique suivant $(O, \vec{j}\,)$.

La droite $x = 0$ est asymptote verticale à C_h.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

- ✓ **Contenu :** Suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Comparer des expressions numériques, encadrer une expression numérique, étudier la monotonie et la convergence d'une suite.
- ✓ **Corrigé :**

1) Soit $a > 0$ et $x \in [a, a+1]$

a / On a : $0 < a \leq x \leq a + 1$ donc $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{a+1}$.

b / Démontrons que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$.

On a $\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ donc $\int_a^{a+1} \frac{1}{a+1}dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{a}dx$

d'où $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$. (1)

2) On pose pour $n \geq 2$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

a/ Montrons que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$

En utilisant l'inégalité (1) et en remplaçant successivement a par 1, 2 , 3 etc on obtient :

$$
\begin{array}{ll}
a = 1 & \frac{1}{2} \leq \ln(2) - \ln(1) \leq 1 \\
a = 2 & \frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2} \\
a = 3 & \frac{1}{4} \leq \ln(4) - \ln(3) \leq \frac{1}{3} \\
\vdots & \\
a = n-1 & \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}
\end{array}
$$

En additionnant membre à membre ces inégalités on obtient après simplification :

$s_n - 1 \leq \ln(n) \leq s_n - \frac{1}{n} \leq s_n$.

b / Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{s_n}$.

♦ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et Sn $\geq$ ln(n) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

♦ Sn > 0 et $s_n - 1 \leq \ln(n) \leq s_n$ donc $\dfrac{s_n - 1}{s_n} \leq \dfrac{\ln(n)}{s_n} \leq 1$ d'où $1 - \dfrac{1}{s_n} \leq \dfrac{\ln(n)}{s_n} \leq 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{s_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{s_n} = 1$.

3) On pose pour tout n $\geq$ 2, $u_n = s_n - \ln(n)$.

a / Montrons que u est minorée

On ln(n) $\leq$ S_n signifie S_n-ln(n) $\geq$ 0 donc u_n $\geq$ 0 donc u est minorée par 0.

b / Montrons que u est décroissante :

$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n + 1) - (S_n - \ln(n)) = S_{n+1} - S_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n + 1) - \ln(n))$

Or on sait que d'aprés (1) que $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

d'où $\dfrac{1}{n+1} - \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \leq 0$. ainsi u est décroissante.

c/ Montrons que u est convergente :

On a : $\begin{cases} u \text{ est décroissante} \\ u \text{ est minorée} \end{cases}$ donc u est convergente.