

# EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

**SESSION  
DE CONTRÔLE**

**SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES**

**EPREUVE : MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3h**

**COEFFICIENT : 3**

## Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) Le nombre  $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)^5$  est un réel.
- 2) Les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 - 6z - 7 + i = 0$  sont  $1 + 2i$  et  $-1 + 3i$ .
- 3) Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls.

Si  $\arg(z') \equiv -\arg(z) [2\pi]$  alors  $z' = \bar{z}$ .

- 4) L'écriture exponentielle du nombre complexe  $(\sqrt{3} + i)^8$  est  $2^8 e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ .

## Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  et  $C(0, 0, 3)$ .

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .  
b) En déduire qu'une équation du plan  $(ABC)$  est  $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .
- 2) Soit  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[AC]$ .  
On désigne par  $\Delta$  la droite passant par  $I$  et de vecteur directeur  $\vec{k}$  et par  $\Delta'$  la droite passant par  $J$  et de vecteur directeur  $\vec{j}$ .  
a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .  
b) En déduire que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont sécantes au point  $\Omega \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ .
- 3) Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega$  et passant par  $O$ .  
a) Vérifier que  $(S)$  passe par les points  $A, B$  et  $C$ .  
b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

## Exercice 3 (6 points)

I – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - x$ .

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x \geq 1$ .

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe

$C_g$  d'une fonction  $g$  définie, continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote à la courbe  $C_g$ .

La courbe  $C_g$  admet une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$  au voisinage de  $+\infty$ .

1) a) Déterminer  $g(1)$ ,  $g(2)$  et  $g(3)$ .

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

c) Déterminer le signe de  $g'(x)$ .

2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = e^{g(x)}$  et soit  $C_h$  sa courbe représentative.

a) Calculer  $h(1)$ ,  $h(2)$  et  $h(3)$ .

b) Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

c) En écrivant  $\frac{h(x)}{x} = \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}$ , pour  $x > 2$ , montrer que la courbe  $C_h$  admet, au voisinage de  $+\infty$ , une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .

d) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

3) Soit  $\alpha > 0$ .

On note  $M$  et  $N$  les points des courbes  $C_g$  et  $C_h$  d'abscisse  $\alpha$ .

a) Calculer la distance  $MN$  en fonction de  $g(\alpha)$ .

b) Montrer que la distance  $MN$  est minimale lorsque  $\alpha = 2$ .

4) Tracer la courbe  $C_h$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Exercice 4 (5 points)

1) Soit  $a$  un réel strictement positif et  $x$  un réel de l'intervalle  $[a, a+1]$ .

a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{a+1}$ .

b) Dédire que  $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$ . (1)

2) Soit  $(S_n)$  la suite définie pour  $n \geq 2$  par  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

a) Montrer, en utilisant (1), que  $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$ .

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{S_n}$ .

3) On pose, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $U_n = S_n - \ln(n)$

a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est minorée.

b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.

