REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

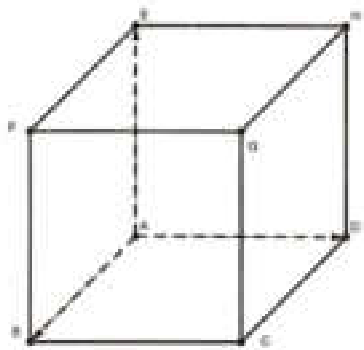
SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3h** **COEFFICIENT : 3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3
La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à
   a) $\overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BA}$.

2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite
   a) (CH) b) (CF) c) (CG).

3) Une équation du plan (ACE) est
   a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $x - y = 1$.

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est
   a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
   b) Vérifier que $b^2 = a$.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.
   a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
   b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

   Montrer que $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$
   c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 3/3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C de la fonction logarithme népérien («ln »).

1) Placer les points de la courbe C d'abscisses e et $\sqrt{e}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$.

   On note C_f sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

   c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$.

   d) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et C.

   b) Tracer C_f dans l'annexe ci-jointe.

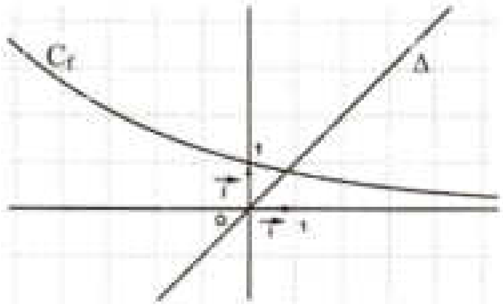
4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

   a) Montrer que $\int_1^e \ln^2 x \, dx = e - 2$.

   b) Calculer A.

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation $e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans $[0, 1]$ une solution unique α.

   b) Vérifier que $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ;\ n \geq 0 \end{cases}$$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

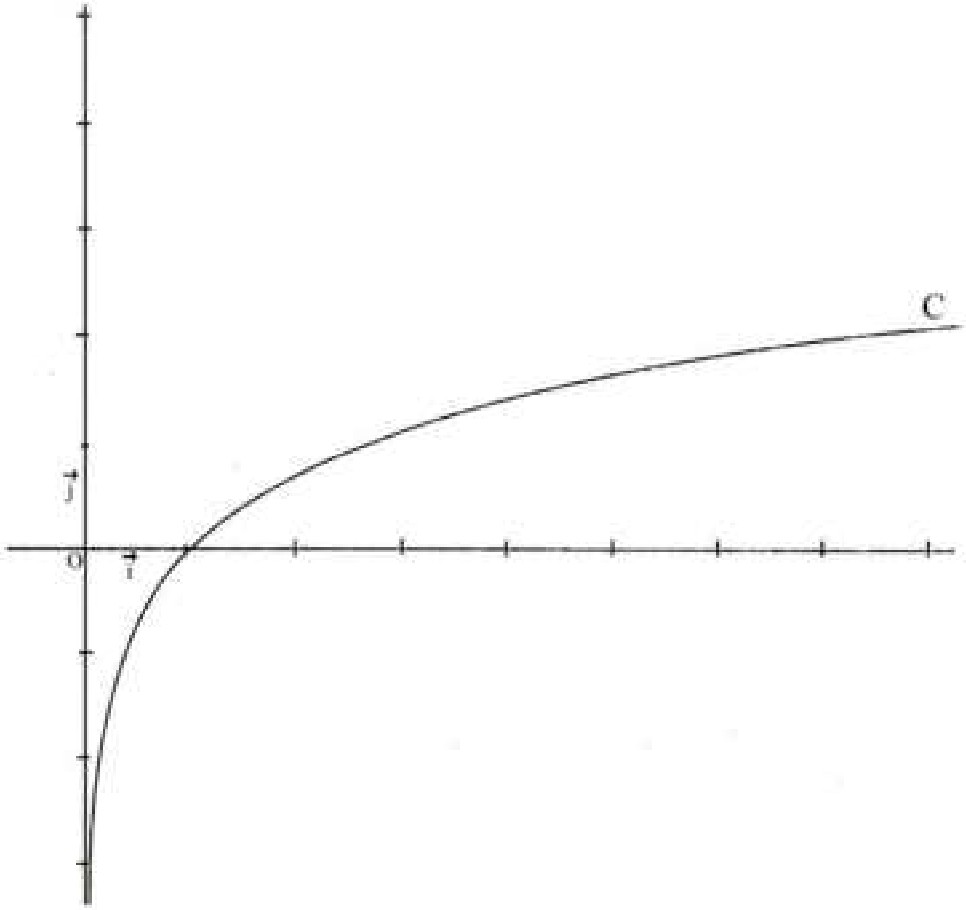
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4} |U_n - \alpha|$.

   d) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

   e) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers α.

3) a) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$.

   b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.


C
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$