Examen du baccalauréat (Juin 2011)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session de contrôle

Exercice 1

1) c)
2) b)
3) a)
4) b)

Exercice 2

1) Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{x-1}{4x-3}$.

a) $f'(x) = \frac{-3+4}{(4x-3)^2} = \frac{1}{(4x-3)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Comme *f* est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f(0), f(\frac{1}{2})\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

b) $f(x) - x = \frac{x-1}{4x-3} - x = \frac{x-1-x(4x-3)}{4x-3} = \frac{-(2x-1)^2}{4x-3}$.

$4x-3 < 4 \times \frac{1}{2} - 3$ donc $4x-3<0$ et par suite $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2)

a) Montrons que pour tout pour $n \in IN$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Par récurrence

Pour *n*=0, $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Soit $n \in IN$, supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

$u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ et par suite $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

D'où pour tout pour $n \in IN$ $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrons que (u_n) est croissante.

Soit $n \in IN$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ car $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est convergente vers une limite l.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \text{f est continue sur } \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ \text{Pour tout n , } u_n \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente vers l.} \end{array}\right\}$$

Donc $l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2l-1)^2}{4l-3} = 0 \Leftrightarrow l = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $\mathrm{A}(-1, 1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0, 1)$, $\mathrm{C}(0, 2, -1)$ et $\mathrm{D}(-1, 3, 2)$. .

1) .

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times1+(-1)\times1+1\times(-1) = 0$

donc le triangle ABC est rectangle en A.

2) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

Par suite $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC)

donc $\overrightarrow{AD}$ est normal à (ABC) .

3) Le volume V du tétraèdre DABC .

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{3}{2}AD^2\right| = \frac{0+4+4}{4} = 2$$

4) Soit I, J et K les milieux respectifs de [DA], [DB] et [DC].

On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC).

a) $I(-1,2,1)$ et $(ABC)//Q$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal à Q par suite

$Q: 0x+2y+2z+d=0$,

$I(-1,2,1)\in Q$ donne $2\times 2+2\times 1+d=0 \Leftrightarrow d=-6$

Donc $Q: y+z-3=0$

b) $J(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2})\in Q\ car\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3=0$ et $K(\frac{-1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2})\in Q\ car\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}-3=0$.

c) V' le volume du tétraèdre DIJK .

$V'=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{ID}\right|$ or $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{ID}$

Ainsi $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(2\overrightarrow{IJ}\wedge 2\overrightarrow{AIK}\right).2\overrightarrow{ID}\right|=8V'$

Exercice 4

1) a) D'après le graphique, g(x) < 0 pour $x\in\left]0,1\right[$; $g(x)>0$ pour $x\in\left]1,+\infty\right[$ et g(1)=0.

b) pour $x\in\left]0,1\right[$, $(x-1)<0$ et g(x) < 0 donc $(x-1)g(x)\geq 0$

pour $x\in\left]1,+\infty\right[$, $(x-1)>0$ et g(x) > 0 donc $(x-1)g(x)\geq 0$

pour x=1 . $(x-1)$ g(x)=0

Donc pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $(x-1)g(x)\geq 0$

2) On donne $g(x)=2\ln(x)+\frac{x-1}{x}$ et $f(x)=(x-1)^2\ln(x)+x-1$.

a) $f'(x)=2(x-1)\ln x+(x-1)^2\times\frac{1}{x}+1 \quad =(x-1)(2\ln x+\frac{x-1}{x})+1=(x-1)g(x)+1$

b) Tableau de variation de f .

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x-1)^2\ln x+x-1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2\ln x+x-1=+\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

a) $f(1)=0$; $f'(1)=(1-1)g(1)+1=1$ donc (T) a pour équation : y = x-1.

b) Position relative de (C_f) et (T).

$f(x)-(x-1)=(x-1)^2\ln x$

x	0 1 $+\infty$
$f(x)-(x-1)$	‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	‖ (T)/ (C_f) | (C_f) / (T)

c) La courbe (C_f) .