REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3 heures** **COEFFICIENT : 3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l 'absence de réponse vaut 0 point.

1) L'équation $(z-i)(z^2+4)=0$ admet dans $\mathbb{C}$:

a) une unique solution b) exactement deux solutions c) exactement trois solutions.

2) Le nombre complexe $(1-i)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à :

a) 2 b) $\sqrt{2}$ c) $2i$.

3) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$ est :

a) croissante sur $\mathbb{R}$ b) décroissante sur $\mathbb{R}$ c) n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

4) L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,dt$ est égale à :

a) $2\ln(e-e^{-1})$ b) 0 c) $2\ln(e+e^{-1})$.

Exercice 2 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{x-1}{4x-3}$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis déterminer $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x)-x \geq 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (6points)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-1, 3, 2)$. .

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (ABC).
3) Calculer le volume V du tétraèdre $DABC$.
4) Soit I, J et K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

   On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC).

   a) Donner une équation cartésienne du plan Q.

   b) Vérifier que J et K appartiennent à Q.

   c) On désigne par V' le volume du tétraèdre $DIJK$.

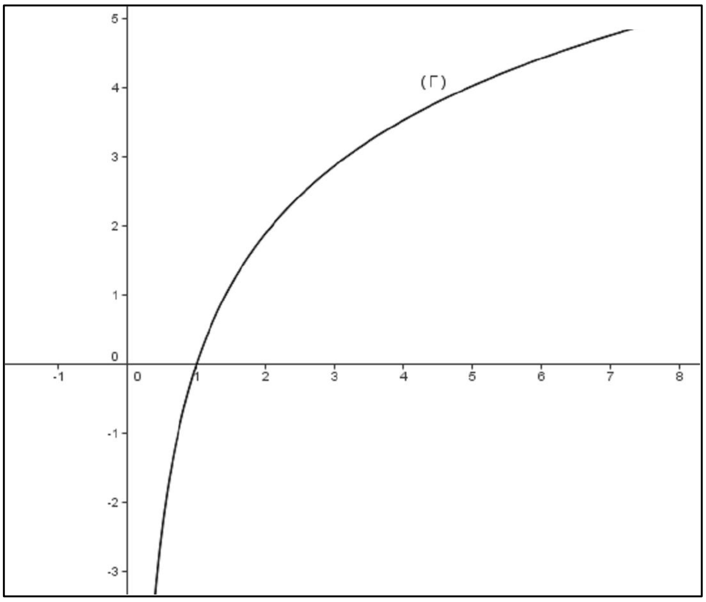
   Montrer que $V = 8V'$.

Exercice 4 (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

On sait que (Γ) n'admet aucun extremum.



1) a) Par lecture graphique, donner le signe de g sur $]0, +\infty[$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(x-1)\, g(x) \geq 0$.

2) La fonction g est définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2\ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)^2\ln(x)+x-1$, et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=(x-1)\,g(x)+1$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

a) Vérifier que (T) a pour équation : y = x-1.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (T).

c) Tracer la courbe (C_f) .