

# MATHS

## Section : Mathématiques

### 1<sup>ère</sup> Session

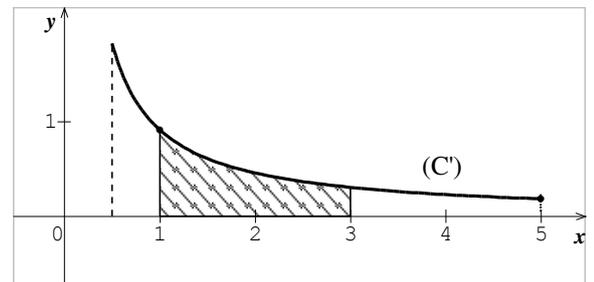
#### Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $[\frac{1}{2}, 5]$  telle que sa courbe représentative  $(C)$  passe par les points  $A(1,0)$  et  $B(3, 1)$ . Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe  $(C')$  de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1)  $(C)$  admet une tangente de coefficient directeur  $-1$ .
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à  $1$ .
- 3)  $(C)$  admet une tangente de coefficient directeur  $\frac{1}{2}$ .
- 4) Pour tous  $a$  et  $b$  de  $[1,3]$ ,  $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ .



#### Contenu

- Tangente à une courbe
- Notion d'aires
- Inégalités des accroissements finis

#### Solutions

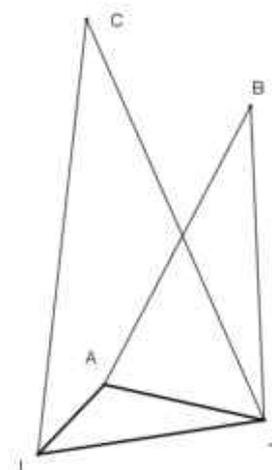
1. Faux., car Pour  $x \in [\frac{1}{2}, 5]$ ,  $f'(x) > 0$ . Par suite  $f'(x) \neq -1$  pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, 5]$ .
2. Vrai. En effet : La fonction  $f'$  est continue et positive sur  $[1,3]$  donc l'aire de la partie hachurée est égale à :  
$$\int_1^3 f'(x) dx = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1.$$
3. Vrai. En effet : La fonction  $f'$  est continue sur  $[\frac{1}{2}, 5]$  et  $\frac{1}{2} \in f'([\frac{1}{2}, 5])$  donc il existe  $c \in [\frac{1}{2}, 5]$  tel que  $f'(c) = \frac{1}{2}$ .
4. Vrai. En effet : La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1,3]$  et pour  $x \in [1,3]$ ,  $|f'(x)| \leq 1$ .  
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous  $a$  et  $b$  de  $[1,3]$ ,  $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ .

## Exercice 2

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  et

$$(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

On désigne par  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{IA}$  et par  $r_B$  et  $r_C$  les rotations de même angle  $\frac{\pi}{6}$  et de centres respectifs B et C.



- 1) a) Déterminer  $r_C(I)$ .
- b) Montrer que  $r_B \circ t(I) = J$ .
- c) En déduire que  $r_B \circ t = r_C$ .

- 2) Soit  $K = t(C)$ .

Montrer que  $BC = BK$  et  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

- 3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et  $(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

- a) Soit O le milieu de [AC].

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

- b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

## Contenu

- Composée rotation et translation
- Configuration de base ( triangle isocèle, parallélogramme)

## Aptitudes visées :

- Reconnaître la composée d'une rotation et d'une translation
- Exploiter une isométrie pour déterminer la nature d'un quadrilatère.

## Solutions

1. a) Le triangle CIJ est isocèle en C et  $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ , par suite  $CI = CJ$  et  $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

On en déduit que  $r_C(I) = J$ .

- b) Le triangle BAJ est isocèle en B et  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ , par suite  $BA = BJ$  et  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

On en déduit que  $r_B(A) = J$ .  $\begin{cases} t(I) = A \\ r_B(A) = J \end{cases}$  donc  $r_B \circ t(I) = J$ .

- c)  $r_B \circ t$  est la composée d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et d'une translation donc c'est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

Or  $r_B \circ t \mid - J$ ,  $CI = CJ$  et  $\widehat{CI, CJ} = \frac{\pi}{6} \cdot 2\pi$ . Il en résulte que  $C$  est le centre de  $r_B \circ t$ .

On en déduit que  $r_B \circ t = r_C$ .

2. Puisque  $K \mid t C$  donc  $r_B \circ t C = r_B K$ , or  $r_B \circ t C = r_C C = C$ . Il en résulte que  $r_B K = C$  ou encore  $BC = BK$  et  $\widehat{BC, BK} = \frac{\pi}{6} \cdot 2\pi$ .

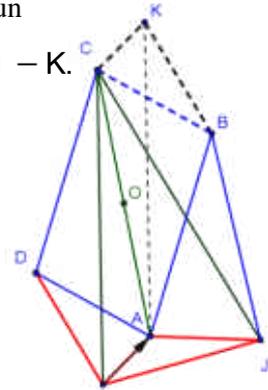
3. a) On sait que  $K \mid t C$  donc  $\overline{CK} = \overline{IA}$  et les points  $I, A$  et  $C$  ne sont pas alignés donc  $IAKC$  est un parallélogramme. Comme  $O$  est le milieu de  $[IC]$  donc  $O$  est le milieu de  $[IK]$ . Il en résulte que  $S_O \mid - K$ .  
d'autre part Le point  $O$  est le milieu de  $[AC]$  donc  $S_O \mid A - C$ .

Le triangle  $DIA$  est isocèle de base  $[IA]$  tel que  $\widehat{DI, DA} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

$S_O \mid - K, S_O \mid A - C, \widehat{BK, BC} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  et le triangle  $BKC$  est isocèle de base  $[KC]$ .

On en déduit que l'image du triangle  $IAD$  par  $S_O$  est le triangle  $BKC$ .

b) L'image du triangle  $IAD$  par  $S_O$  est le triangle  $BKC$ ,  $S_O \mid - K$  et  $S_O \mid A - C$  donc  $S_O \mid D - B$  ou encore  $O$  est le milieu de  $[BD]$  de plus  $O$  est le milieu de  $[AC]$  et les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés. On en déduit que  $ABCD$  est un parallélogramme.



### Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A$  le point de coordonnées  $(3, 2)$ .

Soit  $N$  un point de l'axe  $(O, \vec{u})$  et  $P$  le point de l'axe  $(O, \vec{v})$  tel que  $ANP$  est un triangle rectangle en  $A$ .

1) a) Soit les points  $E(3, 0)$  et  $F(0, 2)$ .

Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $S$  de centre  $A$  qui transforme  $E$  en  $F$ .  
Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe  $(O, \vec{u})$  par  $S$ .

c) En déduire que  $S(N) = P$ .

d) Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $z'$  tel que  $M' = S(M)$ .

Montrer que  $z' = -\frac{3}{2}i z + \frac{13}{2}i$ .

2) a) On note  $x$  l'abscisse du point  $N$  et  $y$  l'ordonnée du point  $P$ .

Montrer que  $3x + 2y = 13$ .

b) Déterminer les points  $N$  et  $P$  dont les coordonnées sont des entiers.

### Contenu

- *Similitude directe ( image d'une configuration de base par une similitude directe, expression complexe d'une similitude directe)*
- *Arithmétique*

### Aptitudes visées :

- Reconnaître une similitude directe.
- Reconnaître l'image d'une droite par une similitude directe.
- Identifier l'image d'un point par une similitude directe.
- Résoudre un problème d'arithmétique.

## Solutions

1. a)  $A \neq E$  et  $A \neq F$  donc il existe une unique similitude directe  $S$  de centre  $A$  qui envoie  $E$  en  $F$ , son rapport est

$$k = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{2} \text{ et son angle } \alpha \text{ pour mesure } \left( \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

b)  $S(E) = F$  et  $E \in O, \vec{u}$  donc  $S(O, \vec{u})$  est la droite passant par  $F$  et perpendiculaire à  $O, \vec{u}$ .

Il en résulte que  $S(O, \vec{u}) = O, \vec{v}$ .

c)  $S(AN)$  est la droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $AN$ , il en résulte que  $S(AN) = AP$ .

$N \in AN \cap O, \vec{u}$  donc  $S(N) \in S(AN) \cap S(O, \vec{u}) = AP \cap O, \vec{v} = P$ . D'où  $S(N) = P$ .

d)  $S$  est la similitude directe de centre  $A$  d'affixe  $z_A = 3 + 2i$ , de rapport  $\frac{3}{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$  le point d'affixe  $z'$ , image de  $M$  par  $S$ . L'expression complexe de  $S$  est de la

forme  $z' = az + b$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$  avec  $a = \frac{3}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} i$  et  $\frac{b}{1 - \frac{3}{2}i} = 3 + 2i$  donc  $b = \frac{13}{2}i$ .

On en déduit que  $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$ .

2. a) L'affixe de  $N$  est  $z_N = x$  et l'affixe de  $P$  est  $z_P = iy$ .

$$S(N) = P \Leftrightarrow iy = \frac{-3}{2}ix + \frac{13}{2}i \Leftrightarrow \left( \frac{-3}{2}x + \frac{13}{2} \right) i \Leftrightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{13}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y = 13.$$

b)  $N(x, 0)$  et  $P(0, y)$ .  $x$  et  $y$  sont des entiers si et seulement si  $(x, y)$  est solution de l'équation

$$3x - 2y = 13 \text{ dans } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Réolvons alors dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $E : 3x + 2y = 13$ .

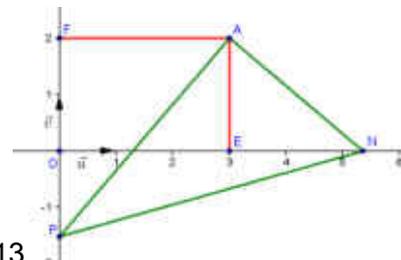
$(1, 5)$  est solution de  $E$  donc  $3x - 2y = 13 \Leftrightarrow 3x + 2y = 3 \times 1 + 2 \times 5 \Leftrightarrow 3(x - 1) - 2(-y + 5) = 0$ .

$3$  divise  $2(-y + 5)$  et  $3 \wedge 2 = 1$  donc d'après Gauss  $3$  divise  $-y + 5$  par suite  $-y - 5 = 3k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

ou encore  $y = -3k + 5$ . En remplaçant  $y$  par sa valeur dans  $*$ , on obtient  $x = 2k + 1$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Réciproquement  $3(2k + 1) - 2(-3k + 5) = 3 + 10 - 13 = 0$ .

On en déduit que  $N(2k + 1, 0)$ ,  $P(0, -3k + 5)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .



## Exercice 4

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $0,125$ .

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à  $10^{-3}$  près par défaut.

1) a) Montrer que  $p(X > 10) = 0,286$ .

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander  $n$  oscilloscopes ( $n \geq 2$ ).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note  $p_1$  la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer  $p_1$  en fonction de  $n$ .

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que  $p_1$  soit supérieure à  $0.999$  ?

### Contenu

- Loi de probabilité continue (loi exponentielle)
- Loi binomiale

### Aptitudes visées :

- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi exponentielle.
- Reconnaître une loi binomiale
- Calculer la probabilité d'un événement pour une loi binomiale.

### Solutions

1. a)  $p(X > 10) = e^{-0,125 \times 10} = e^{-1,25} = 0,286$ .

b) L'évènement « l'oscilloscope a une durée de vie inférieure à 6 mois » se traduit par  $0 \leq X \leq 0,5$ .

$$p(0 \leq X \leq 0,5) = 1 - e^{-\frac{0,125}{2}} = 1 - e^{-0,0625} = 0,06.$$

2. On considère la variable aléatoire  $Y$  qui prend pour valeurs, le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans.  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n, p(X > 10) = 0,286$ .

La loi de  $Y$  est donnée par  $P(Y = k) = \binom{n}{k} 0,286^k 0,714^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

a)  $p_1 = p(Y > 0) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,714^n$ .

$$b) p_1 \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,714^n > 0,999 \Leftrightarrow 0,714^n < 0,001 \Leftrightarrow n \ln 0,714 < \ln 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,714} = 20,505. \text{ Soit } n = 21.$$

### Exercice 5

I ] On considère la fonction  $f_2$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_2(x) = x^2 - \ln x$  et on désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de  $f_2$ .

2) On a tracé ci-dessous, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe (L) de la fonction  $\ln$  et la courbe (C) d'équation  $y = x^2$ .

a) Soit  $x > 0$ . On considère les points  $M$  et  $M_2$  de même abscisse  $x$  et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que  $MM_2 = f_2(x)$ .

b) Construire alors les points de la courbe  $(\Gamma)$  d'abscisses respectives  $2, \frac{1}{e}$  et  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

c) Tracer la courbe  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

II ] 1) Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction  $f_k$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f_k(x) = x^k - \ln x$ .

a) Déterminer  $f'_k$  la fonction dérivée de  $f_k$ .

b) Montrer que  $f_k$  admet un minimum en  $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  égal à  $\frac{1 + \ln k}{k}$ .

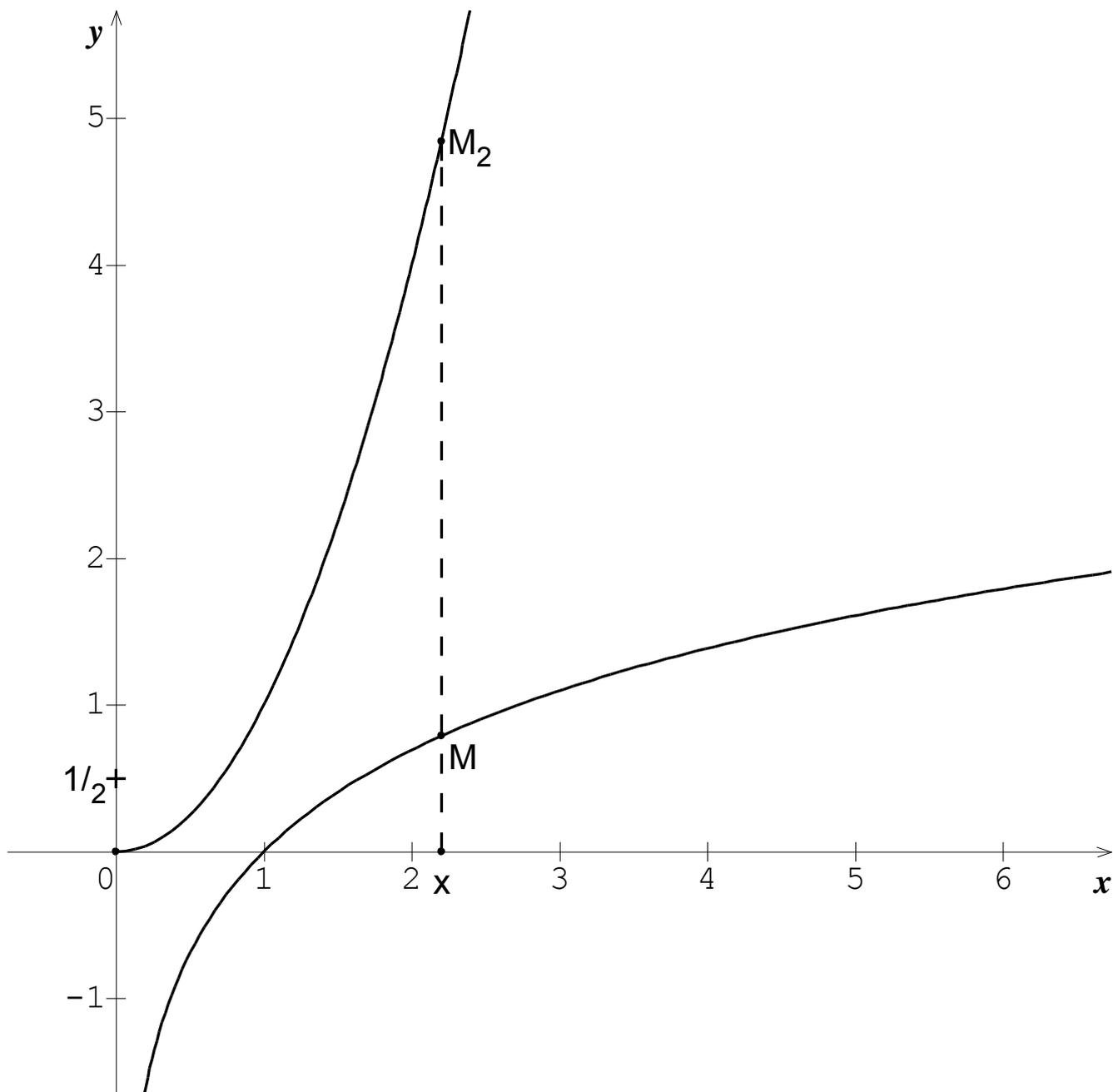
c) Pour tout réel  $x > 0$ , on considère les points  $M_k(x, x^k)$  et  $M(x, \ln x)$ .  
Déterminer la valeur minimale de la distance  $MM_k$ .

2) Pour tout entier  $k \geq 2$ , on pose  $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ .

a) Vérifier que  $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$  et en déduire la limite de  $(u_k)$ .

b) Soit  $A(1, 0)$  et  $A_k$  le point de coordonnées  $(u_k, f_k(u_k))$ .

Calculer la limite de la distance  $AA_k$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .



- *Fonction ln : continuité, dérivabilité, branches infinies .*
- *Notion d'extremum*
- *Suite réelle.*

#### **Aptitudes visées :**

- *Calculer la limite d'une fonction.*
- *Interpréter graphiquement un résultat.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un minimum d'une fonction.*
- *Calculer la limite d'une suite réelle.*

## Solutions

### I.

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$  donc  $\Gamma$  admet une branche parabolique de direction celle de  $O, \vec{j}$ .

c) La fonction  $f_2$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f_2'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ .

Le signe de  $f_2'(x)$  est celui de  $2x^2 - 1$ .  $\begin{cases} 2x^2 - 1 \\ x \in ]0, +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

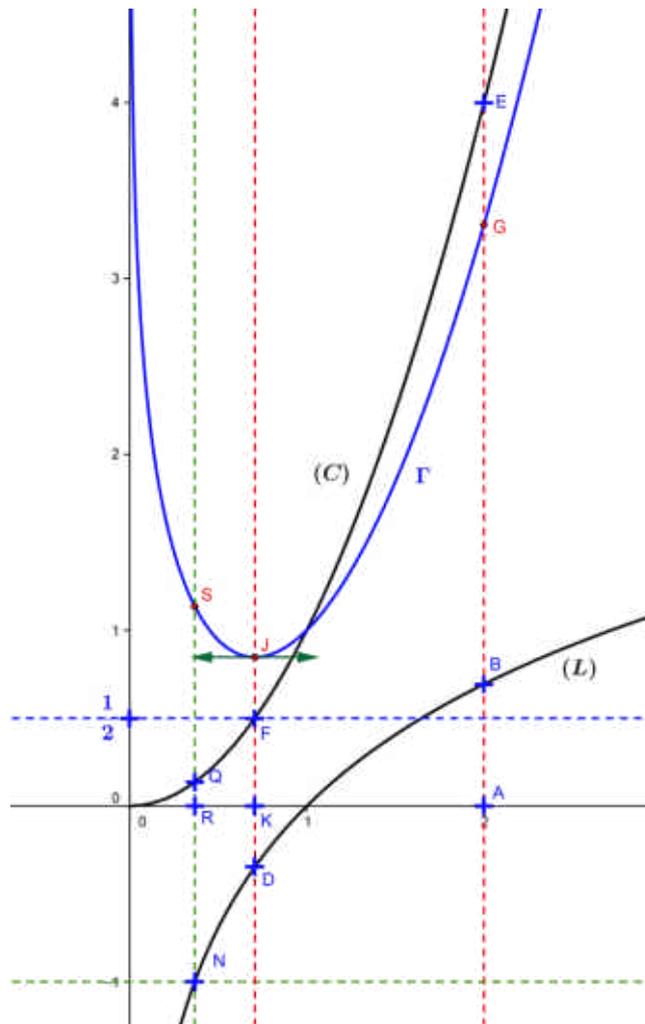
x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f_2'(x)$		0	+
$f_2$	$+\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$

2. a) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $MM_2 = |x^2 - \ln x| - |f_2(x)| = f_2(x)$  car  $f_2$  admet un minimum global strictement positif sur  $]0, +\infty[$  donc  $f_2(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

b) \*) La droite passant par le point A de l'axe des abscisses d'abscisse 2 et parallèle à l'axe des ordonnées coupe L en B et C en E. Ainsi le point de  $\Gamma$  d'abscisse 2 est le point G de  $AE$  tel que  $EG = AB$ .

\*\*) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée  $-1$ , on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe L en N. Du point N on mène la parallèle à l'axe des ordonnées. Elle coupe C en Q et l'axe des abscisses en R, le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$  est alors le point S du segment RQ tel que  $RS = NQ$ .

\*\*\*) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée  $\frac{1}{2}$  on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe C en F et de F on mène la parallèle à l'axe des ordonnées elle coupe L en H et l'axe des abscisses en K, le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est alors le point J de la demi-droite KF tel que  $KJ = HF$ .



## II.

1. a) La fonction  $f_k$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'_k(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$ .
  - b)  $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  de plus  $f'_k(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  et  $f'_k(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ . Il en résulte que  $f'_k$  s'annule en  $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  en changeant de signe, d'où  $f_k$  admet un minimum en  $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  égal à  $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k - \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \ln k = \frac{1 - \ln k}{k}$ .
  - c)  $MM_k = |x^k - \ln x| - |f'_k(x)| - f'_k(x)$  car le minimum de  $f_k$  est  $\frac{1 - \ln k}{k} > 0$  pour  $k \geq 2$ . Donc la valeur minimale de  $MM_k$  est la valeur minimale de  $f_k$  sur  $]0, +\infty[$  qui est égale à  $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1 - \ln k}{k}$ .
2. a) Pour tout  $k > 2$ ,  $\ln u_k = \ln \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \ln \frac{1}{k} = -\frac{\ln k}{k}$ .  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{\ln k}{k} = 0$  d'où  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$ .
  - b)  $AA_k = \sqrt{1 - u_k^2 + f'_k(u_k)^2}$ . Or  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(u_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln k = 0$ .  
On en déduit que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} AA_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - u_k^2 + f'_k(u_k)^2} = 0$ .