Section: Sciences Expérimentales *Session principale 2012*

Matière : Mathématiques

<u>Exercice 1</u> (3 points)

- ✓ **Contenu :** Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, équation d'un plan, intersection d'une sphère et un plan, intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Aptitudes visées :** Exploiter le produit scalaire et le produit vectoriel dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'un plan, déterminer la section d'une sphère par un plan, déterminer l'intersection d'un plan et une droite.
- ✓ **Corrigé :**

1) b/ 2) b/ 3) c/ 4) b/

<u>Exercice 2</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) $a = \sqrt{3} + i$

on a $|a| = 2$.

Si θ est un argument de a alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$ d'où $\theta \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et par suite $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) OA = $|a|$ = 2 signifie A ∈ $C_{(O,2)}$ et arga $\equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA})\,[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ donc A ∈ à la demi-droite [O,t) telle que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ d'où A ∈ $C_{(O,2)} \cap$ [O,t) (voir figure1).

2) a) $b\bar{b} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-a}\right) = \frac{(a-1)(\bar{a}-1)}{(\bar{a}-1)(a-1)} = 1$

$b\bar{b} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 = 1 \Leftrightarrow$ OB =1 donc B appartient au cercle (ζ).

b) $\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)} = \frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1} = \frac{\frac{1}{b}-1}{\bar{a}-1} = \frac{1-b}{b(\bar{a}-1)} = \frac{1-b}{\frac{a-1}{1-\bar{a}}(\bar{a}-1)} = \frac{b-1}{a-1}$ donc $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

" $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel" signifie " $\frac{z_{\overrightarrow{IB}}}{z_{\overrightarrow{IA}}}$ est un réel" ; alors il existe un réel α tel que les $\overrightarrow{IA} = \alpha\,\overrightarrow{IB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et par suite les points A,I et B sont alignés.

c) B∈(C) ∩ (IA) (voir figure1).

3) $b = e^{i\theta} = \frac{a-1}{1-\bar{a}} = \frac{\sqrt{3}-1+i}{1-\sqrt{3}+i} = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}} + i\,\frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$ alors $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-3\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

- ✓ **Contenu :** Probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Variable aléatoire, loi de probabilité, loi binomiale, Espérance.
- ✓ **Aptitudes visées :** Calculer la probabilité d'un événement sachant qu'un autre est réalisé, Calculer la probabilité d'un événement en utilisant la formule de BAYES, Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, Reconnaître un schéma de Bernoulli et en dégager les paramètres, Déterminer la loi de probabilité d'une épreuve de Bernoulli.
- ✓ **Corrigé :**

I)

1) La probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O est 0.46.

2) a) Soit P_1 la probabilité q'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$P_1 = C_4^1.(0.45)^1.(1-0.46)^3 = 0.29.$$

b) Soit P_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs

$$P_2 = p(A).p(B).p(AB).p(O).4! = 0.31 \times 0.18 \times 0.05 \times 0.46 \times 24 = 0.03$$

II)

1) $p = p(O \cap Rh\_) = p(Rh\_/O).p(O) = 0.09 \times 0.46 = 0.0414.$

2) a) X est une variable aléatoire qui suit la loi binomial de paramètres n et $p = 0.0414$.

$p(X = k) = C_n^k.(0.0414)^k \times (0.9586)^{n-k}$ $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

b) $E(X) = n \times p = n \times 0.0414$

c) $n = 5000$; $E(X) = 5000 \times 0.0414 = 207$

Donc le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 est 207.

<u>Exercice 4</u> (3 points)

- ✓ **Contenu :** Equations différentielles du type $y' = ay$, $a \in$ _ - Sens de variation.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre une équation différentielle du programme.
  Résoudre des problèmes puisés dans des situations réelles pouvant être modélisées par une équation différentielle.
- ✓ **Corrigé :**

1) $y(t) = k.e^{-0.115t}$; $k \in IR$

2) a) $Q(0) = 1.4$ alors $k = 1.4$ d'où $Q(t) = 1.4e^{-0.115t}$, $t \geq 0$.

b) $Q'(t) = -0.161e^{-0.115t} < 0$ pour tout réel $t \geq 0$.

t	0		$+\infty$
Q'(t)		—	
Q(t)	1.4	$\searrow$	0

c) $Q(t) = 0.7 \Leftrightarrow 1.4e^{-0.115t} = 0.7 \Leftrightarrow e^{-0.115t} = \frac{0.7}{1.4} \Leftrightarrow -0.115t = \ln(0.5) \Leftrightarrow t = 6$

3) $0.7 \leq Q(t) \leq 1.4$ signifie $0 \leq t \leq 6.027$.

<u>Exercice 5</u> (6 points)

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques ; limites, continuité, dérivabilité, variation, courbe, calcul d'aire.
- ✓ **Aptitudes visées :** Déterminer les limites d'une fonction, déterminer la dérivée d'une fonction , Déterminer le sens de variation d'une fonction , identifier les branches infinies d'une courbe, tracer une courbe, exploiter une courbe, calculer l'aire d'une partie du plan délimitée par des courbes.
- ✓ **Corrigé :**

1) a) Signe de f(x) :

x	0		α		$+\infty$
f(x)		+	0	—	

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha^2+\alpha\ln(\alpha)+\alpha}{(\alpha+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -(\alpha+1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}.\ln x + 1\right) = +\infty$, $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}.\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0$

3) a) $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b)

x	α		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g(x)	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $g(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} + 1 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = 1 - \alpha$

b) voir figure 2

c) voir figure 2

5) a) $\int_\alpha^1 f(x)dx = \int_\alpha^1 -xg(x)$

On pose $u(x) = -x \quad \rightarrow \quad u'(x) = -1$

$v'(x) = g'(x) \quad \rightarrow \quad v(x) = g(x)$

Alors $\int_\alpha^1 f(x)dx = -[x.g(x)]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)dx$

b) $\mathcal{A} = \int_\alpha^1 |f(x) - g(x)| dx \ (u.a) = \int_\alpha^1 g|(x) - f(x)| dx \ (u.a) = \int_\alpha^1 g(x)dx - \int_\alpha^1 f(x)dx \ (u.a)$

$= \int_\alpha^1 g(x)dx - [-x.g(x)]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)dx \ (u.a) = [x.g(x)]_\alpha^1 = g(1) - \alpha g(\alpha)$

$\mathcal{A} = 1 - \alpha(1-\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$

Figure 1 (exercice 2)

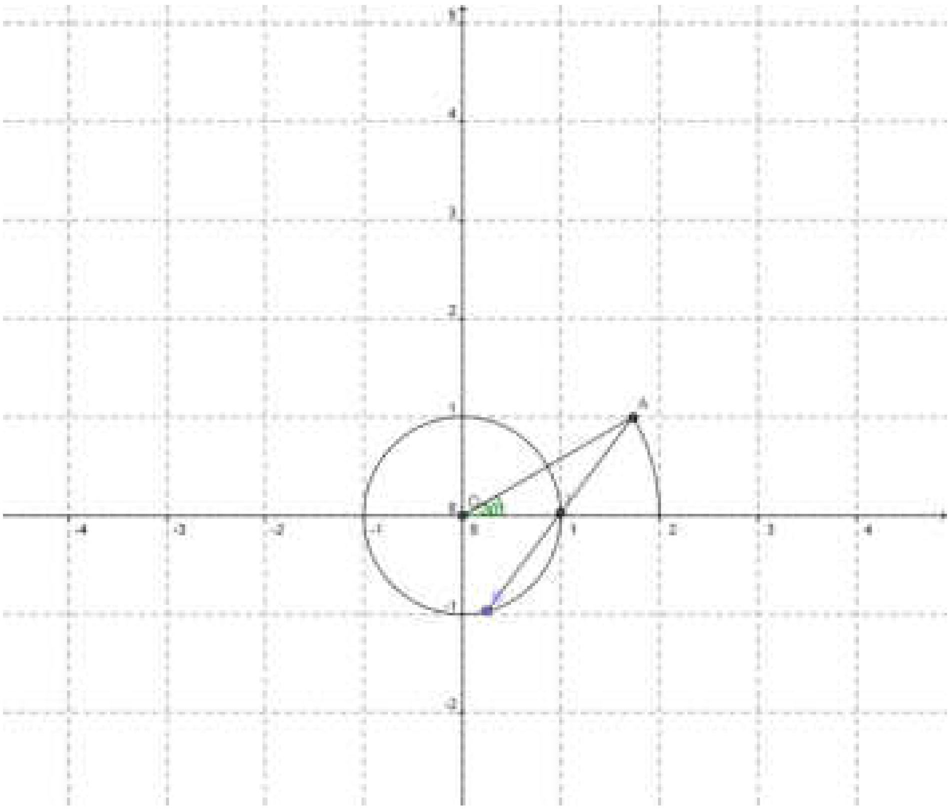

Figure 2 (exercice 5)