Examen du baccalauréat (Juin 2012)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Sciences Techniques	Session principale

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
c)	a)	a)	c)

Exercice 2

On considère les points A$(2,1,1)$ B$(1,1,0)$ C$(1,0,1)$

1/a/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\square\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{A\square}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{\square C}\neq\vec{0}$ donc A, B et C déterminent un plan.

b/ $\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{\square C}$ est un vecteur normal au plan P, d'où P : x – y – z +d = 0

comme A ∈ P, d = 0 et on trouve P : x- y – z = 0.

2/ D$(2,0,0)$.

a/ D ∉ P car 2 ≠ 0 donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

b/ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ V = $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A\square}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{\square D}\right|$ = $\frac{1}{6}|-2|$ = $\frac{1}{3}$

3/ Soit (S) la sphère de centre I$\begin{pmatrix}\frac{3}{2,1}\\\frac{2,1}{2}\end{pmatrix}$ et passe par le point D.

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\square}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\square}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}\frac{1}{\square}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\square}{2}\end{pmatrix}$

IA =IB = ID = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc les points A et B appartiennent à (S).

b/ (S) et P contiennent les points A et B donc ils ne sont ni tangents ni disjoints par suite ils se coupent suivant un cercle $(\mathscr{C})$

c/ $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{\square}{2}\end{pmatrix}$ IC = ID donc C appartient à (S)

A, B et C appartiennent à S∩P donc $(\mathscr{C})$ est circonscrit au triangle ABC.tel que

4/ a/ $\begin{cases}\Delta \perp P\\ I \in \Delta\end{cases}$ donc $\boxed{\Delta : \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \alpha \\ y = \frac{1}{2} + \alpha \quad ; \alpha \in IR \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases}}$

b/ le centre du cercle est le projeté orthogonal de I sur P c'est Ω.

$\Omega \in \Delta \cap P$ ﻍ il existe un réel α tel que $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \alpha \\ y = \frac{1}{2} + \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \square \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ ﻍ $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{6} \\ x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

d'où $\boxed{\Omega\begin{pmatrix}\frac{4}{3{,}2}\\ \frac{}{3{,}2}\\ \frac{}{3}\end{pmatrix}}$

c/ D'= $S_\Omega(\square)$ ﻍ $\begin{cases} x_{D'} = 2\square_\Omega - x_D \\ y'_D = 2y_\Omega - y_D \\ z'_D = 2z_\Omega - z_D \end{cases}$ nn ﻍ $\begin{cases} x'_D = \frac{\square}{3} - 2 = \frac{2}{3} \\ y'_D = \frac{4}{3} \\ z'_D = \frac{4}{3} \end{cases}$ donc $\boxed{D'\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}$

On pose V'= Volume du tétraèdre D'ABC

$\overrightarrow{AD'}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; V'=$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A\square} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD'}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right|$ d'où : $\boxed{V' = V = \frac{1}{\square}}$

Exercice n°3

1/a/ f est continue et strictement décroissante sur [1,+∞[donc f réalise une bijection de [1,+∞[

sur $f([1,+\infty[) =]-\infty,1]$; $0 \in]-\infty,1]$ et $f(1) \neq 0$

Par suite l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans]1,+∞[.
$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2-\alpha+\ln\alpha = 0$

b/ f est strictement décroissante sur [1,+∞[

x	1		α		+∞
f(x)		+	0	−	

2/

a/ Démonstration par récurrence

* $u_0 = 1$ donc $1 \le u_0 \le \alpha$
* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \le u_n \le \alpha$

donc $\ln 1 \le \ln u_n \le \ln\alpha$ d'où $2 \le 2+\ln u_n \le 2+\ln\alpha$

Comme $\ln\alpha = \alpha - 2$ donc $1 \le u_{n+1} \le \alpha$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \le u_n \le \alpha$

b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2 + \ln u_n - u_n = f(u_n)$

$f(u_n) \ge 0$ car $u_n \le \alpha$ donc (u_n) est croissante.

c/ * La suite (u_n) est croissante et majorée par α elle converge vers un réel ℓ.

* Soit g la fonction définie et continue sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = 2+\ln x$

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n)=u_{n+1}$

* (u_n) converge vers ℓ et g est continue en ℓ

Donc $g(\ell) = \ell$

Ce qui donne $g(\ell) - \ell = 0$ d'où $f(\ell) = 0$ Ainsi (u_n) converge vers α.

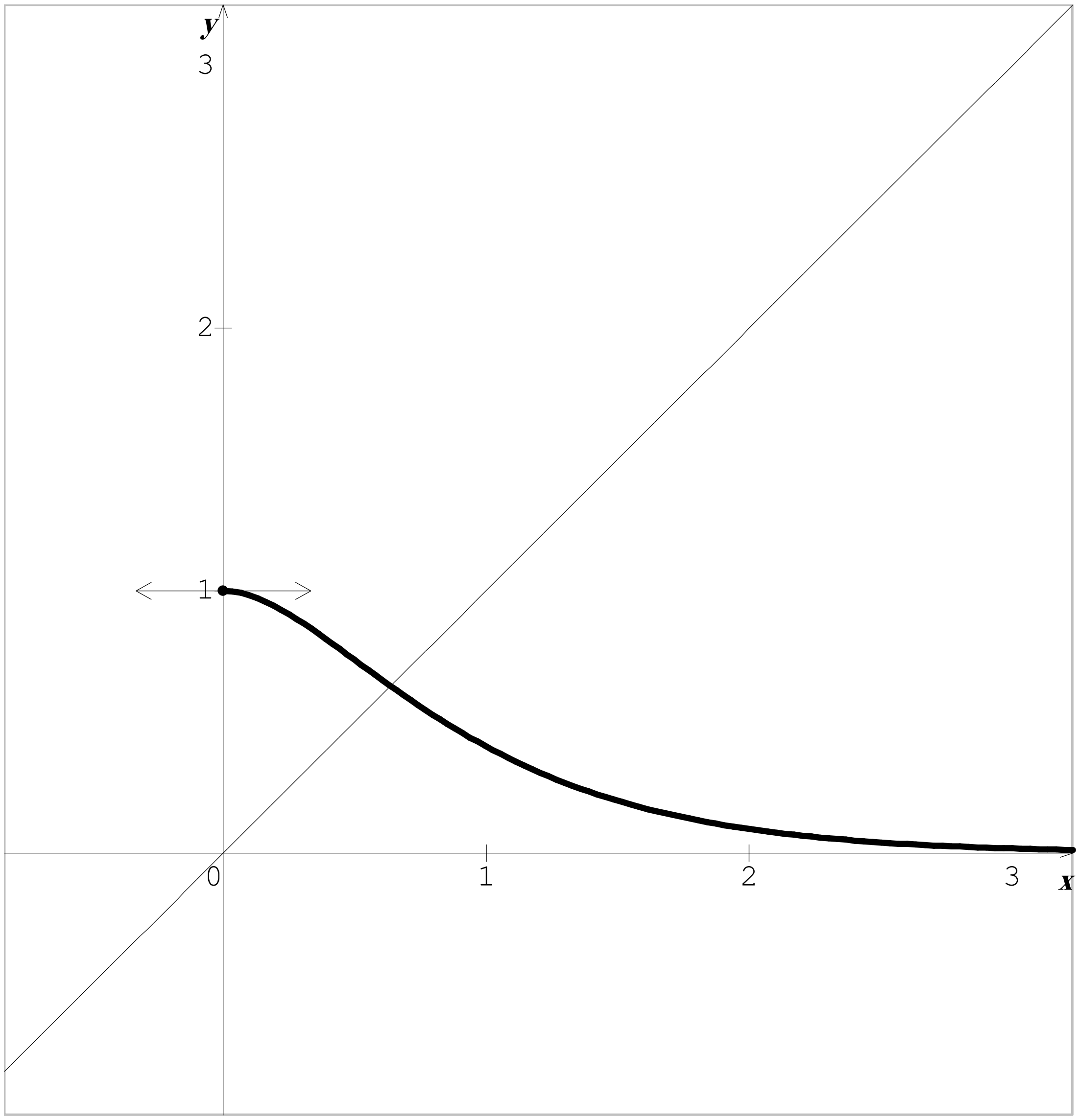
Exercice n°4 :

1/a/ Par lecture graphique

* $f(0) = 1$
* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
* $f'_d(0) = 0$

b/ * f est continue et strictement décroissante sur [0 ;+∞[donc f réalise une bijection de [0,+∞[sur $f([0,+\infty[) =]0,1]$.

2/



3/ f(x) = $(ax+b)e^{-2\square}$, x ∈ [0,+∞[, a et b ∈ IR

a/ $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} b = 1 \\ a - 2\square = 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} b = 1 \\ a = \square \end{cases}$

Donc, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$

b/ I = $\int_0^{\beta} (2x+1)e^{-2\square}\,dx$

Intégration par parties:

On pose u(x) = 2x+1 ; u'(x) = 2

v'(x) = $e^{-2\square}$; v(x) = $-\frac{1}{2}e^{-2\square}$

I = $\left[-\frac{1}{2(2x+1)e^{-2x}}\right]_0^{\beta} - \int_0^{\beta} -\square^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-\square x}\right]_0^{\beta}$

$$= -\frac{1}{2}(2\beta + 1)e^{-2\beta} - \frac{1}{2}e^{-2\beta} + 1$$

$$\boxed{I = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta}}$$

c/ $\mathcal{A} = \int_{\beta}^{1} f^{-1}(x)\,dx = I - \beta^2$

avec β^2 est l'aire du carré de côté β.

D'où $A = 1 - (1 + \beta)e^{-2\beta} - \beta^2$