

Mathématiques
Economie et gestion
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) b	2) c	3) a	4) b
------	------	------	------

1) $f(x) = -1 + \ln x$; $x \in]0, +\infty[$. F la primitive de f qui s'annule en e .

On remarque que les trois fonctions proposées s'annulent en e . Pour distinguer laquelle est la primitive cherchée, on va les dériver.

a) $F(x) = x \ln x - x$; $F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

b) $F(x) = x \ln x - 2x + e$; $F'(x) = \ln x + 1 - 2 = -1 + \ln x = f(x)$

c) $F(x) = x \ln x - e$; $F'(x) = \ln x + 1$

D'où la réponse est en b).

2) f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et telle $f'(x) = 1 + e^x$. g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(2x)$.

$$g'(x) = (2x)' \cdot f'(2x) = 2(1 + e^{2x}) = 2 + 2e^{2x}. \text{ La réponse est donc en c).}$$

3) (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^n t e^{-2t} dt$.

$$u_{n+1} = \int_0^{n+1} t e^{-2t} dt = \int_0^n t e^{-2t} dt + \int_n^{n+1} t e^{-2t} dt = u_n + \int_n^{n+1} t e^{-2t} dt.$$

$$\text{On a donc } u_{n+1} = u_n + \int_n^{n+1} t e^{-2t} dt.$$

$$\text{On a } t e^{-2t} \geq 0 ; \text{ pour tout } t \in [n, n+1]. \text{ Donc } \int_n^{n+1} t e^{-2t} dt \geq 0.$$

$$\int_n^{n+1} t e^{-2t} dt \geq 0 \Rightarrow u_n + \int_n^{n+1} t e^{-2t} dt \geq u_n \\ \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n.$$

D'où la suite (u_n) est croissante. La réponse est donc en a).

4) On procède par élimination :

D'après la matrice donnée on a :

- un seul arc d'origine C , c'est l'arc $(C \rightarrow D)$. Donc le schéma en c) n'est pas convenable puisqu'il y a deux arcs d'origine C : $(C \rightarrow D)$ et $(C \rightarrow E)$.
- 3 arcs d'origine A : $(A \rightarrow B)$, $(A \rightarrow C)$ et $(A \rightarrow E)$. Donc le schéma en a) n'est pas convenable puisqu'il n'y a pas l'arc $(A \rightarrow B)$ d'origine A et d'extrémité B .

La réponse est donc en b).

Exercice 2

1)a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour calculer le déterminant de A , utilisons la 3^{ème} colonne.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times (3 - 2) = 1.$$

Remarque :

Pour calculer le déterminant de A , on peut utiliser n'importe quelle ligne ou colonne en respectant la règle des signes. Il vaut mieux utiliser une ligne ou une colonne où il y a des 0, pour simplifier le calcul.

b) $\det(A) = 1 \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

2)a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3.$$

b) $A(A - 2I_3) = -I_3 \Leftrightarrow A(-A + 2I_3) = I_3$. D'où $A^{-1} = -A + 2I_3 = 2I_3 - A$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } -A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

3)a) On se propose de résoudre dans \mathbb{R}^3 , le système (S) :
$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On introduit l'écriture matricielle :

$$\begin{aligned} \text{(S)} \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$S_3 = \{(5, 3, -3)\}.$$

$$b) (S') \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ \ln\left(\frac{v^2}{u^2w}\right) = -1 \\ \ln\left(\frac{u^2w^2}{v}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ \ln v^2 - \ln(u^2w) = -1 \\ \ln(u^2w^2) - \ln v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ 2\ln v - (\ln(u^2) + \ln w) = -1 \\ \ln(u^2) + \ln(w^2) - \ln v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln u + \ln v - \ln w = 1 \\ -2\ln u + 2\ln v + \ln w = -1 \\ 2\ln u - \ln v + 2\ln w = 1 \end{cases}$$

On pose $x = \ln u$; $y = \ln v$ et $z = \ln w$. On obtient :

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2x + 2y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ln u \\ \ln v \\ \ln w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^5 \\ e^3 \\ e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $u = e^5$; $v = e^3$ et $w = e^{-3}$.

Exercice 3

1) En utilisant la calculatrice, on trouve $\bar{x} = 3,5$; $\bar{y} = 11,22$ et $\sigma_x = 1,71$.

2)a) La droite de régression de z en x , obtenue par la méthode des moindres carrés a pour équation :

$$z = \alpha(x - \bar{x}) + \bar{z} = \alpha x - \alpha\bar{x} + \bar{z} = \alpha x + \beta ;$$

$$\text{où } \alpha = \frac{\text{cov}(x, z)}{v(x)} = \frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma_x^2} \text{ et } \beta = -\alpha\bar{x} + \bar{z} = -\frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma_x^2} \bar{x} + \bar{z}$$

b) $z_i = \ln(y_i)$.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	1,97	2,07	2,26	2,47	2,67	2,80

c) $\bar{z} = 2,37$; $\text{cov}(x, z) = 0,51$; $\alpha = \frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma_x^2} = 0,17$ et $\beta = 1,77$.

3)a) $\sigma_z = 0,30$; $r(x, z) = \frac{\text{cov}(x, z)}{\sigma_x \sigma_z} = \frac{0,51}{1,71 \times 0,30} = 0,99$.

$r(x, z) > 0,95$, donc il y a une très forte corrélation entre x et z et cela justifie le choix de l'ajustement linéaire de z en x .

b) On a $z = \ln(y)$.

$$z = \alpha x + \beta \Leftrightarrow \ln(y) = \alpha x + \beta$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\alpha x + \beta}$$

$$\Leftrightarrow y = e^\beta e^{\alpha x}$$

$$y = e^\beta e^{\alpha x} = a e^{bx} ; \text{ avec } a = e^\beta = 5,87 \text{ et } b = \alpha = 0,17.$$

$$y = 5,87 e^{0,17x}$$

c) Appliquons l'ajustement précédent pour estimer le pourcentage des familles tunisiennes qui auront au moins un ordinateur en 2015.

Le rang de l'année 2015 est $x_{2015} = 11$.

Pour $x = 11$ on a $y = 5,87 e^{0,17 \times 11} = 38,09$.

Donc on estime que 38,09% des familles tunisiennes auront au moins un ordinateur en 2015.

Exercice 4

1) Par une lecture graphique :

a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Remarques :

a) $f'(0) = 0$, car la courbe de f admet une tangente horizontale au point O .

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{4}$ car la courbe (C) de f admet la droite d'équation $y = \frac{1}{4}$ comme asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ car la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$.

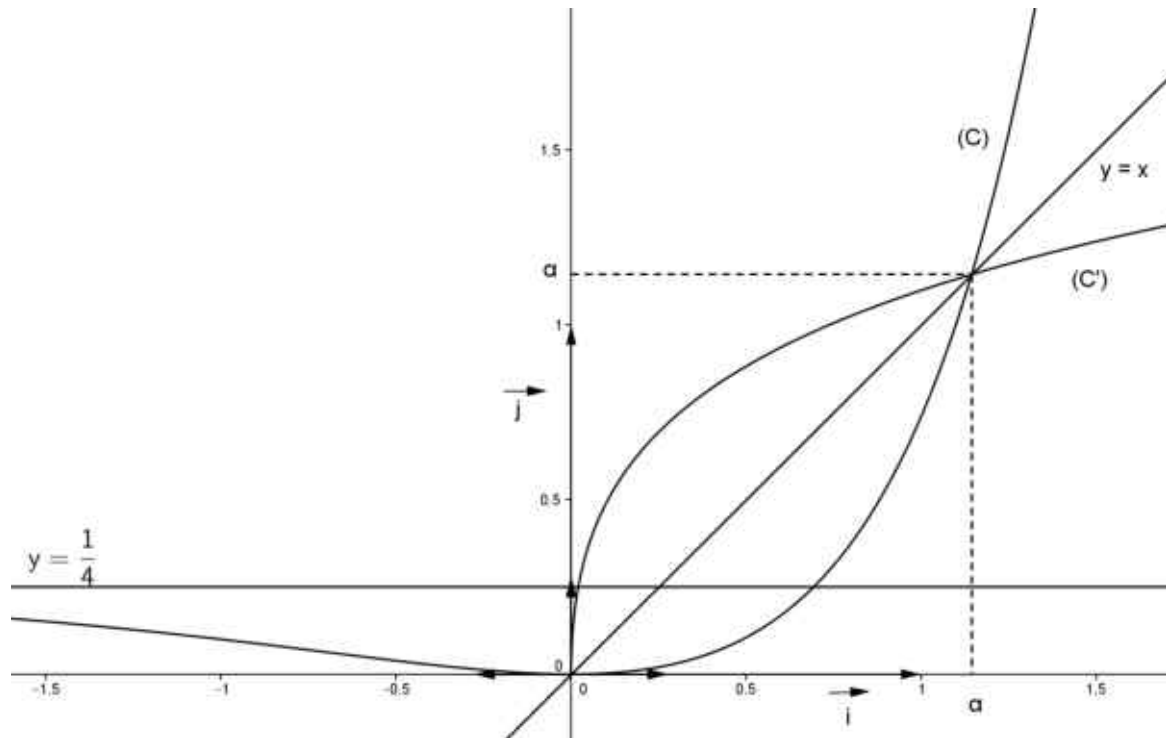
2) g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)$.

a) D'après le graphique la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'où g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. g est continue sur $[0, +\infty[$ puisque f est continue sur ce même intervalle.

g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'où g réalise une bijection de

$$[0, +\infty[\text{ sur } g([0, +\infty[) = f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0, +\infty[.$$

b) g^{-1} la fonction réciproque de g . On sait que la courbe (C') de g^{-1} est le symétrique de la courbe de g par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$.



3) On suppose que $f(x) = \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^-$.

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)^2 \\ &= x - \frac{1}{4}(e^x - 1)^2 = x - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x + 1) = \frac{1}{4}(4x - 1 + 2e^x - e^{2x}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où pour tout } x \in \mathbb{R}^-, \quad x - f(x) = \frac{1}{4}(4x - 1 + 2e^x - e^{2x}).$$

b) A l'aire de la région du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Par symétrie, on peut remarquer que l'aire A de cette région du plan est le double de l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = \alpha$, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$. On a donc :

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^\alpha (x - f(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (4x - 1 + 2e^x - e^{2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[2x^2 - x + 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(2\alpha^2 - \alpha + 2e^\alpha - \frac{1}{2}e^{2\alpha} \right) - \frac{3}{2} \right] \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4} + e^\alpha - \frac{1}{4}e^{2\alpha} \text{ unité d'aire.} \end{aligned}$$