Mathématiques
Economie et gestion
Corrigé de la session principale Juin 2013

Exercice 1

1) Le graphe G est complet. **Faux**
Les sommets A et C ne sont pas reliés par une arête, donc le graphe G n'est pas complet.
2) La matrice associée au graphe G est la matrice M. **Faux**
Dans le graphe G, il y a une arête qui relie les sommets B et D.
3) Le graphe G admet un cycle eulérien. **Faux**
Il existe des sommets de degré impair donc G n'admet pas un cycle eulérien.
Les sommets C et E sont de degré impair.
4) Le graphe G admet une chaine eulérienne. **Vrai**
Il existe exactement deux sommets de degré impair (C et E), donc le graphe G admet une chaine eulérienne.
5) Le nombre chromatique du graphe G est égal 4. **Vrai**

Sommet	B	D	C	E	A
degré	4	4	3	3	2
couleur	C_1	C_2	C_3	C_4	C_3

6) La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est égale 11. **Faux**
La longueur du chemin le plus court du sommet A au sommet C est 10. Les chemins les plus courts sont : A-B-E-C et A-D-E-C.

Exercice 2

Dans une ville 20% des habitants possèdent un ordinateur.

- 90% des individus possédant un ordinateur utilisent l'Internet.
- 60% des individus n'ayant pas d'ordinateur utilisent l'Internet.

On choisit au hasard un individu de cette ville et on désigne par A et B les évènements suivants :
A : « L'individu choisi possède un ordinateur »
B : « L'individu choisi utilise l'Internet».
1) Dans cette ville 20% possèdent un ordinateur alors la probabilité que l'individu choisi possède un ordinateur est $p(A)=\frac{20}{100}=0.2$; $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0.2=0.8.$
90% des individus possédant un ordinateur utilisent l'internet, alors la probabilité que l'individu choisi utilise l'internet sachant qu'il possède un ordinateur est
$p(B/A)=\frac{90}{100}=0.9.$ On a $p(\overline{B}/A)=1-p(B/A)=1-0.9=0.1$

60% des individus n'ayant pas d'ordinateur utilisent l'Internet, alors la probabilité que l'individu choisi utilise l'internet sachant qu'il ne possède pas un ordinateur est

$$p(B/\overline{A}) = \frac{60}{100} = 0.6.$$

2)a) $p(B \cap A) = p(A).p(B/A) = 0.2 \times 0.9 = 0.18.$

$p(B \cap \overline{A}) = p(\overline{A}).p(B/\overline{A}) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$

b) $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = 0.18 + 0.48 = 0.66.$

3) La probabilité que l'individu choisi possède un ordinateur sachant qu'il utilise l'internet est

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.18}{0.66} = \frac{3}{11} \simeq 0.27$$

Exercice 3

1)a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (6-4) - (10-6) + (10-9) = 1.$$

b) $\det(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

c) $B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

d) $B \times A = I_3$, d'où $A^{-1} = B$

B est la matrice inverse de A.

2) Un concessionnaire d'automobiles expose trois modèles M_1, M_2 et M_3.

On pose x, y et z les prix, respectivement, du modèle M_1, M_2 et M_3.

- La commande de la société 1 s'élève à 270 milles dinars soit :
  2 automobiles du modèle M_1, donc à un coup de $2x$ milles dinars
  5 automobiles du modèle M_2, donc à un coup de $5y$ milles dinars
  3 automobiles du modèle M_3, donc à un coup de $3z$ milles dinars
  On a donc $2x + 5y + 3z = 270$.
- La commande de la société 2 s'élève à 165 milles dinars soit $x + 3y + 2z = 165$
- La commande de la société 3 s'élève à 140 milles dinars soit $x + 2y + 2z = 140$

La situation se résume par le système suivant : $\begin{cases} 2x+5y+3z=270 \\ x+3y+2z=165 \\ x+2y+2z=140 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+5y+3z=270 \\ x+3y+2z=165 \\ x+2y+2z=140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 270 \\ 165 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Ainsi le prix d'une automobile du modèle M_1 est de 20 milles dinars, le prix d'une automobile du modèle M_2 est de 25 milles dinars et le prix d'une automobile du modèle M_3 est de 35 milles dinars.

Exercice 4

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{1-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ e^{-x}e = \lim\limits_{x\to+\infty} e\dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e\dfrac{1}{(\frac{e^x}{x})} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe C de f au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$.

D'où la courbe C de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2)a) $f(x) = x\,e^{1-x}$.

$f'(x) = e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} - x\,e^{1-x} = (1-x)e^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = (1-x)e^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in$ ¯ , $e^{1-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

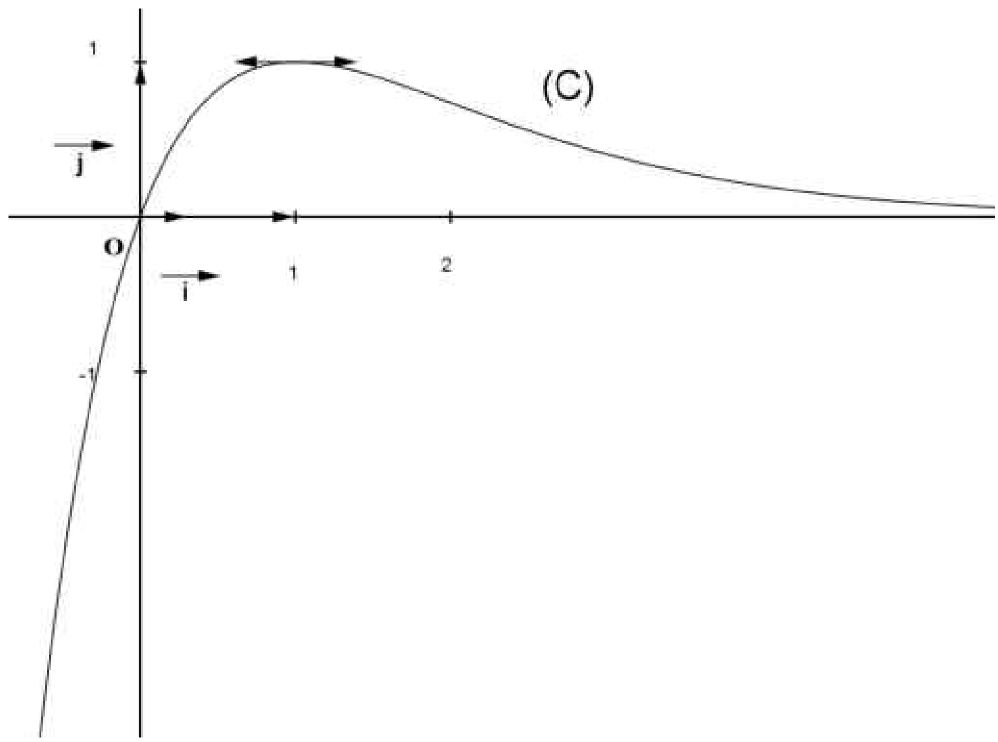
c) On peut remarquer que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et en particulier elle est strictement croissante sur $[0,1]$. D'où on a :

$0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \le f(x) \le f(1)$; or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

$\qquad\qquad \Rightarrow \quad 0 \le f(x) \le 1.$

Ainsi pour tout réel x dans $[0,1]$, on a $0 \le f(x) \le 1$.

3) La courbe C de f :



4) (u_n) la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } 0 < a < 1, \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{pour tout } n \in \end{cases}$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in$ ¯ , $0 \le u_n \le 1$.

- $u_0 = a$ avec $0 < a < 1$, d'où $0 \le u_0 \le 1$. Ainsi la proposition est vérifiée pour $n = 0$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition est vraie pour k, c'est-à-dire $0 \leq u_k \leq 1$.
- Montrons que la proposition est vraie pour k+1.

  On a : $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow u_k \in [0, 1]$

  $\Rightarrow 0 \leq f(u_k) \leq 1$

  $\Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$

  D'où la proposition est vraie pour k+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence on a :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $u_n \leq 1 \Rightarrow -u_n \geq -1$

$\Rightarrow 1 - u_n \geq 0$

$\Rightarrow e^{1-u_n} \geq e^0$

$\Rightarrow e^{1-u_n} \geq 1.$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{1-u_n} \geq 1$.

c) Montrons que la suite (u_n) est croissante, pour cela calculons $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n e^{1-u_n} - u_n = u_n(e^{1-u_n} - 1).$

$u_{n+1} - u_n = u_n(e^{1-u_n} - 1).$

D'après ce qui précède on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{1-u_n} \geq 1$ et $u_n \geq 0$, d'où

$u_{n+1} - u_n = u_n(e^{1-u_n} - 1) \geq 0$, par conséquent $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi la suite (u_n) est croissante.

d) D'après 4)a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, d'où la suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Soit l sa limite.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f est continue sur ℝ, donc $l = f(l)$.

$f(l) = l \Leftrightarrow l e^{1-l} = l$

$\Leftrightarrow l(1 - e^{1-l}) = 0$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $1 - e^{1-l} = 0$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $e^{1-l} = 1$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $1 - l = 0$

$\Leftrightarrow l = 0$ ou $l = 1.$

On a la suite (u_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ d'où la limite l ne peut pas être 0, donc $l = 1$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.