REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **4 h** Coefficient : **4**
Section : **MATHEMATIQUES**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

1) a) Vérifier que (3, 0) est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit (x , y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?

b) Déterminer les couples (x , y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$.

1) Soit $P(x, y)$ un point du plan n'appartenant pas à $(O,\vec{i})$, H son projeté orthogonal sur l'axe $(O,\vec{i})$ et $M(X,Y)$ le milieu du segment [PH].

a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

b) Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C), M varie sur l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.

c) Tracer l'ellipse (E) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit $P_0(1,\sqrt{3})$ et $M_0(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

La tangente (T) au cercle (C) en P_0 coupe l'axe des abscisses au point I.

a) Montrer que I a pour coordonnées (4, 0).

b) Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \dfrac{dt}{1+t^2}\,dt$.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1 + x^2)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, ABCD est un rectangle tel que AB = 1 et $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

et FCDE et BFGH sont deux carrés.

1) On pose $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Montrer que $q^2 = 1 - q$.

b) Vérifier que $FG = q$ et que $EG = q^2$.

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport q.

a) Montrer que $S_1(C) = G$.

b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1.

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.

Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $h = S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que $h(D) = E$.

b) Montrer que h est une homothétie de rapport q^2.

c) Montrer que $\overline{AE} = q^2\,\overline{AD}$ et en déduire le centre de h.

d) Montrer que les points A, G et C sont alignés.

e) Soit $I = h(E)$ et $J = h(F)$.

Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2.

5) On considère la suite (a_n) définie sur IN par $a_n = q^{2n}$.

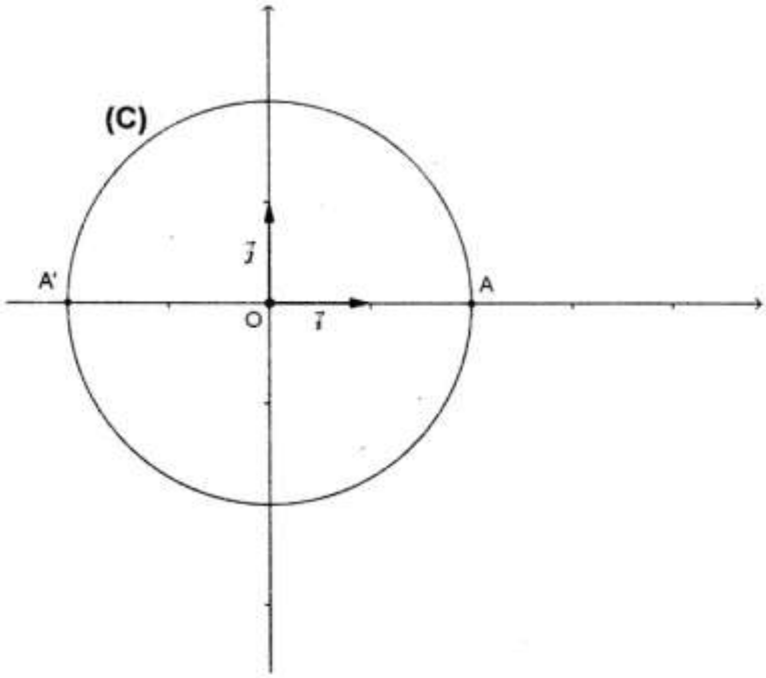
a) Vérifier que a_0, a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ.

b) On pose pour tout entier naturel n, $\mathcal{A}_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et vérifier que la limite de $\mathcal{A}_n$ est égale à l'aire du rectangle ABCD.

ANNEXE

(Figure1)



(Figure 2)