

Corrigé

Exercice 1

1) a) $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $I\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $J\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

b) Le vecteur $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est directeur de la droite (IJ) et le point I de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, il en

résulte qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$$

2) a) $\vec{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\vec{AF} \wedge \vec{AM} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \alpha \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$.

$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BM} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $\vec{BC} \wedge \vec{BM} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{k} = \alpha \vec{i} + \vec{k}$.

b) $A_{AFM} = \frac{1}{2} \|\vec{AF} \wedge \vec{AM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha^2}$ et $A_{BCM} = \frac{1}{2} \|\vec{BC} \wedge \vec{BM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha^2}$, il en résulte que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha$ et $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(\vec{BC} \wedge \vec{BM}) \cdot \vec{BG} = 1$.

b) (M, A, F et G sont coplanaires) $\Leftrightarrow \det(\vec{AF}, \vec{AM}, \vec{AG}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
 $\Leftrightarrow M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \Leftrightarrow (M \text{ et } I \text{ sont confondus}).$

c) Pour

$$\alpha \neq 0, V_{AFMG} = V_{BCMG} \Leftrightarrow |(\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG}| = |(\vec{BC} \wedge \vec{BM}) \cdot \vec{BG}| \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = J \text{ ou } M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right).$$

Exercice 2

1) $p(A) = \frac{9}{30} = 0,3$.

2) a) $p(\bar{B}|A) = 0,65$ et $p(B|A) = 1 - p(\bar{B}|A) = 0,35$.

b) $p(B|\bar{A}) = 0,04$ et $p(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - p(B|\bar{A}) = 0,96$.

c) $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ donc

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(B | A) \times p(A) + p(B | \bar{A}) \times p(\bar{A}) = 0,133.$$

3) Le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves après la fin de la session est $0,133 \times 30 = 3,99$. Soit 4 élèves.

Exercice 3

1) a) La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -\sin x$.

b) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -\sin x \leq 0$ ($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Ainsi f est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = [0, 1].$$

2) a) La fonction f est strictement décroissante et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x) = -\sin x \neq 0$ pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que g est dérivable sur $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, 1[$.

b) Pour tout

$$x \in [0, 1[\text{ et } y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{\sin y} \text{ avec } f(y) = x \Leftrightarrow \cos y = x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = x^2 \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{1 - x^2} \text{ car } \sin y > 0 (y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[).$$

Il en résulte que pour tout $x \in [0, 1[$, $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3) a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g'(x) dx = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 4

1) a) Le signe de $f(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
f(x)		-	+

Le signe de $g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	0	β	$+\infty$
g(x)		-	+

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et $g(\beta) = 0 \Leftrightarrow e^\beta = \frac{1}{\beta}$.

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - \ln x = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} = +\infty$.

c) $h(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha = -g(\alpha)$.

d) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $h'(x) = e^x - \frac{1}{x} = f(x)$.

Le signe de $h'(x)$ est celui de $f(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		-	○ +
h		$+\infty$	$+\infty$

$h(\alpha)$

3) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) - h(x) = e^x - \frac{1}{x} - e^x + \ln x = \ln x - \frac{1}{x} = g(x)$.

b) Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0	β	$+\infty$
$f(x) - h(x)$		-	○ +
Position		C_f est au dessous de C_h	C_f est au dessus de C_h

c) Voir figure.

4) Pour $a > 0$, $MN = |f(a) - g(a)| = |h(a)| = h(a)$ car la fonction h est positive.

La distance MN est minimale si et seulement si $h(a)$ est minimale si et seulement si $a = \alpha$ (D'après 2)d)).

