

## Corrigé

## Exercice 1

1) a)  $F(1,0,1)$ ,  $G(1,1,1)$ ,  $I\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  et  $J\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ .

b) Le vecteur  $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est directeur de la droite (IJ) et le point I de coordonnées  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ , il en

résulte qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est 
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$$

2) a)  $\vec{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AM} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$  donc  $\vec{AF} \wedge \vec{AM} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \alpha \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}$ .

$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BM} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$  donc  $\vec{BC} \wedge \vec{BM} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \vec{k} = \alpha \vec{i} + \vec{k}$ .

b)  $A_{AFM} = \frac{1}{2} \|\vec{AF} \wedge \vec{AM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+\alpha^2}$  et  $A_{BCM} = \frac{1}{2} \|\vec{BC} \wedge \vec{BM}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+\alpha^2}$ , il en résulte que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a)  $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $(\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha$  et  $\vec{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $(\vec{BC} \wedge \vec{BM}) \cdot \vec{BG} = 1$ .

b) (M, A, F et G sont coplanaires)  $\Leftrightarrow \det(\vec{AF}, \vec{AM}, \vec{AG}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$   
 $\Leftrightarrow M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \Leftrightarrow (M \text{ et } I \text{ sont confondus}).$

c) Pour

$$\alpha \neq 0, V_{AFMG} = V_{BCMG} \Leftrightarrow |(\vec{AF} \wedge \vec{AM}) \cdot \vec{AG}| = |(\vec{BC} \wedge \vec{BM}) \cdot \vec{BG}| \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = J \text{ ou } M\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right).$$

## Exercice 2

1)  $p(A) = \frac{9}{30} = 0,3$ .

2) a)  $p(\bar{B}|A) = 0,65$  et  $p(B|A) = 1 - p(\bar{B}|A) = 0,35$ .

b)  $p(B|\bar{A}) = 0,04$  et  $p(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - p(B|\bar{A}) = 0,96$ .

c)  $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$  donc

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(B | A) \times p(A) + p(B | \bar{A}) \times p(\bar{A}) = 0,133.$$

3) Le nombre d'élèves consommateurs de drogues dans une classe de 30 élèves après la fin de la session est  $0,133 \times 30 = 3,99$ . Soit 4 élèves.

### Exercice 3

1) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f'(x) = -\sin x$ .

b) Pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f'(x) = -\sin x \leq 0$  ( $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ). Ainsi  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc elle réalise une bijection de

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(0)\right] = [0, 1].$$

2) a) La fonction  $f$  est strictement décroissante et dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $f'(x) = -\sin x \neq 0$  pour tout  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on en déduit que  $g$  est dérivable sur  $f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, 1[$ .

b) Pour tout

$$x \in [0, 1[ \text{ et } y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{\sin y} \text{ avec } f(y) = x \Leftrightarrow \cos y = x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y = x^2 \Leftrightarrow \sin^2 y = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sin y = \sqrt{1 - x^2} \text{ car } \sin y > 0 (y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[).$$

Il en résulte que pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

3) a)  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$  car  $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  et  $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$  car  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$b) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} g'(x) dx = g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

### Exercice 4

1) a) Le signe de  $f(x)$  est donné dans le tableau suivant :

x	0	$\alpha$	$+\infty$
f(x)		-	+

Le signe de  $g(x)$  est donné dans le tableau suivant :

x	0	$\beta$	$+\infty$
g(x)		-	+

b)  $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$  et  $g(\beta) = 0 \Leftrightarrow e^\beta = \frac{1}{\beta}$ .

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - \ln x = +\infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} = +\infty$ .

c)  $h(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha} - \ln \alpha = -g(\alpha)$ .

d) La fonction h est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $h'(x) = e^x - \frac{1}{x} = f(x)$ .

Le signe de  $h'(x)$  est celui de  $f(x)$ .

x	0	$\alpha$	$+\infty$
$h'(x)$		-	○ +
h		$+\infty$	$+\infty$

$h(\alpha)$

3) a) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) - h(x) = e^x - \frac{1}{x} - e^x + \ln x = \ln x - \frac{1}{x} = g(x)$ .

b) Le signe de  $f(x) - h(x)$  est celui de  $g(x)$ .

x	0	$\beta$	$+\infty$
$f(x) - h(x)$		-	○ +
Position		$C_f$ est au dessous de $C_h$	$C_f$ est au dessus de $C_h$

c) Voir figure.

4) Pour  $a > 0$ ,  $MN = |f(a) - g(a)| = |h(a)| = h(a)$  car la fonction h est positive.

La distance MN est minimale si et seulement si  $h(a)$  est minimale si et seulement si  $a = \alpha$  (D'après 2)d)).

