Corrigé

Exercice 1

1. **Faux** : car

$\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{IC} \wedge 2\overrightarrow{ID}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{ID}\right\| = 4\left|IC \times ID \times \sin\left(\widehat{DIC}\right)\right| = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 1\right) = 2$ par

contre $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 1$

2. **Vrai**: En effet , les vecteurs $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires donc $\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ} = \det\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IG}, \overrightarrow{IJ}\right) = 0.$

3. **Faux** : car la sphère de diamètre [AC] est de centre I donc son rayon est égal à $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et la distance du point I au plan $z - 1 = 0$ est égale à $IJ = 1 > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc l'intersection de la sphère et le plan est vide.

Exercice 2

I. 1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0.$ Ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \left]-\infty, +\infty\right[= \mathbb{R}.$

$0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. Il en résulte que l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α

2) $\begin{matrix} f(-0.4) = -0.464 < 0 \\ f(-0.3) = 0.173 > 0 \end{matrix}$, $f(-0.4) \times f(-0.3) < 0$ donc $-0.4 < \alpha < -0.3$.

II. 1) a) $z^3 = 2 \Leftrightarrow z^3 = 2e^{i0} \Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_1) sont $a_1 = z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i0} = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$.

b) $z^3 = -4 \Leftrightarrow z^3 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$. Ainsi les solutions de l'équation (E_2) sont $b_1 = z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{4}$, $b_2 = z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

$a_1b_1 = -\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$

c) $a_2b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{i\pi} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Ainsi $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2.$

$a_3b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{8}e^{i(-\pi)} = -\sqrt[3]{8} = -2$

2) a) $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = a^3+b^3+3ab(a+b) = -2-6(a+b).$

b) On sait que $(a+b)^3 = -2-6(a+b) \Leftrightarrow (a+b)^3+6(a+b)+2=0$, il en résulte que $(a+b)$ est une solution de l'équation $z^3+6z+2=0.$

3) On sait que $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2$ et $a_1^3+b_1^3 = a_2^3+b_2^3 = a_3^3+b_3^3 = -2$ donc d'après 2)b)

a_1+b_1, a_2+b_2 et a_3+b_3 sont des solutions de l'équation $z^3+6z+2=0$, or l'équation $z^3+6z+2=0$ est de troisième degré donc elle admet dans $\mathbb{C}$ au plus trois solutions.

On en déduit que les solutions de l'équation $z^3+6z+2=0$ sont :

$a_1+b_1 = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $a_2+b_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}+\sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3+b_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}+\sqrt[3]{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) L'unique solution réelle de l'équation $z^3+6z+2=0$ est $a_1+b_1 = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, d'où $a_1+b_1 = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3+6x+2=0$ il en résulte que $\alpha = \sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}.$

Exercice 3

1) Puisque le nombre de mouches après 69 jours est 1034 et il reste le même après 75 jours, il semble alors que le nombre de mouche resterait constant (c'est-à dire 1034) après 85 jours.

2) a) $r = \dfrac{\operatorname{cov}(T,M)}{\sigma_T\sigma_M} = -0.996.$

b) $M = aT+b$ avec $a = \dfrac{\operatorname{cov}(T,M)}{\sigma_T^2} = -0.155$ et $b = \overline{M}-a\overline{T} = 4.036.$ Ainsi $M = -0.155T+4.036.$

3) a) On sait que $M = \ln\left(\dfrac{1035}{N}-1\right) \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N}-1 = e^M \Leftrightarrow \dfrac{1035}{N} = e^M+1 \Leftrightarrow N = \dfrac{1035}{e^M+1}.$

b) D'après 2)b) $M = -0.155T+4.036$ et d'après 3)a) $N = \dfrac{1035}{e^M+1}$, il en résulte que

$N = \dfrac{1035}{e^{-0.155T+4.036}+1} = \dfrac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155T}}$. Ainsi $\alpha = e^{4.036}$ et $\beta = -0.155$.

c) En changeant T par 85, on obtient $N = \dfrac{1035}{1+e^{4.036}e^{-0.155\times 85}} = 1034,8 \doteq 1034$ mouches, on peut donc valider la conjecture émise en 1).

Exercice 4

1) Voir figure.

2) a) $f(5) = \ln\left(5+\sqrt{25-9}\right) = \ln(9) = \ln\left(3^2\right) = 2\ln 3$.

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ} = MP \times PN = (5-3)\left(f(5)-\ln 3\right) = 2\left(2\ln 3 - \ln 3\right) = 2\ln 3$.

$A_{MPN} = \dfrac{MP \times PN}{2} = \dfrac{2\ln 3}{2} = \ln 3$.

d) $A_{MPN} \leq A \leq A_{MPNQ}$ donc $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$.

3) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x + \sqrt{x^2+9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f\left([3,+\infty[\right) = \left[f(3), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [\ln 3, +\infty[$.

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y = x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3, 0)$, $Q'(2\ln 3, 0)$, $N'(2\ln 3, 5)$ et $P'(\ln 3, 5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle M'Q'N'P' et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \ln 3$ et $x = 2\ln 3$.

$A' = A_{M'Q'N'P'} - B$. Or $A_{M'Q'N'P'} = M'P' \times M'Q' = 5\left(2\ln 3 - \ln 3\right) = 5\ln 3$ et $B = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$, on en déduit que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6) a) Pour tout $x \in [\ln 3, +\infty[$ et $y \in [3, +\infty[$

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 9}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = \left(e^x - y\right)^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ye^x = e^{2x} + 9 \\ e^x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^{2x} + 9}{2e^x} \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2} \\ e^x \geq y \end{cases}$$. On en déduit que pour tout

$x \in [\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^x - 9e^{-x}}{2}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4$ donc $A' = (5\ln 3 - 4)$u.a et puisque E

et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4)$u.a.