Mathématiques
Sciences Techniques
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) $(P): x+y-z-3 = 0$

$A(2, 1, 0)$; $2+1-0-3=0$; d'où $A \in (P)$.

$B(2, -1, -2)$; $2+(-1)-(-2)-3=0$; d'où $B \in (P)$.

$C(0, 1, -2)$; $0+1-(-2)-3=0$; d'où $C \in (P)$.

Ainsi les points A, B et C appartiennent au plan (P).

2) a) $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+z^2+4z+5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4+5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 4.$$

D'où (S) est la sphère de centre $I(2, 1, -2)$ et de rayon $R = 2$.

b) $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 4.$

$A(2, 1, 0)$; $(2-2)^2+(1-1)^2+(0+2)^2=4$; d'où $A \in (S)$.

$B(2,-1,-2)$; $(2-2)^2+(-1-1)^2+(-2+2)^2=4$; d'où $B \in (S)$.

$C(0, 1,-2)$; $(0-2)^2+(1-1)^2+(-2+2)^2=4$; d'où $C \in (S)$.

Ainsi les points A, B et C appartiennent à la sphère (S).

Les points A, B et C appartiennent aussi au plan (P), donc (P) et (S) se coupent suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

c) $AB = \sqrt{(2-2)^2+(-1-1)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(0-2)^2+(1-1)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(0-2)^2+(1-(-1))^2+(-2-(-2))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AB = AC = BC$, d'où ABC est un triangle équilatéral.

3)a) La droite Δ est perpendiculaire au plan (P) donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, qui est un vecteur normal au plan (P), est un vecteur directeur de la droite Δ. On a aussi $I(2, 1, -2) \in (P)$.

D'où un système paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $G(x, y, z) \in \Delta \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \\ x+y-z-3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \\ 2+\alpha+1+\alpha-(-2-\alpha)-3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \\ \alpha = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

D'où $G(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

c) $A(2, 1, 0)$; $B(2, -1, -2)$; $C(0, 1, -2)$ et $G(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

$$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{GB}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{GC}\begin{pmatrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, d'où G est le centre de gravité du triangle ABC.

d) On a ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G et (C) son cercle circonscrit, d'où le cercle (C) est de centre G et de rayon GA.

$$GA = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

(C) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Exercice 2

1) f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x\,e^{1-x}$.

a) $x\geq 1 \;\Rightarrow\; 1-x\leq 0$

$\Rightarrow\; e^{1-x}\leq e^{0}$; car la fonction $x\mapsto ex$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow\; e^{1-x}\leq 1$

$\Rightarrow\; x\,e^{1-x}\leq x$

$\Rightarrow\; f(x)\leq x.$

$0\leq x\leq 1 \;\Rightarrow\; -1\leq x-1\leq 0$

$\Rightarrow 0\leq 1-x\leq 1$

$\Rightarrow e^{0}\leq e^{1-x}\leq e^{1}$

$\Rightarrow 1\leq e^{1-x}$

$\Rightarrow x\leq x\,e^{1-x}$

$\Rightarrow x\leq f(x)$

b) $f'(x)=e^{1-x}+x.(e^{1-x})'$; $x\in[0,+\infty[$

$=e^{1-x}+x.(-1)e^{1-x}$

$=(1-x)e^{1-x}$

c) $f'(x)=0 \;\Leftrightarrow (1-x)e^{1-x}=0$

$\Leftrightarrow 1-x=0.$

$\Leftrightarrow x=1$

Le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f	0	↗	1	↘	0

2) (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Pour montrer que $0\leq u_n\leq 1$, pour tout entier naturel n, on raisonne par récurrence.

- On a $0\leq u_0=\dfrac{1}{2}\leq 1$, d'où la proposition est vérifiée pour $n=0$.
- Soit n un entier naturel. On suppose que la proposition est vraie pour cet entier n.

  On a donc $0\leq u_n\leq 1$.

- Montrons que la proposition est vraie pour n+1.

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 \quad &\Rightarrow \; u_n \in [0\,,\,1] \\ &\Rightarrow \; f(u_n) \in [0\,,\,1] \text{ ; d'après le tableau de variation de f} \\ &\Rightarrow \; u_{n+1} \in [0\,,\,1] \\ &\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

D'où la proposition est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence on a $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après 1) a) $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u_n \leq f(u_n)$

$$\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

D'où la suite (u_n) est croissante.

c) On a $0 \leq u_n \leq 1$, donc la suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente. Soit l sa limite.
La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, la limite l vérifie $f(l) = l$.

$$\begin{aligned} f(l) = l \Leftrightarrow \; & l e^{1-l} = l \\ \Leftrightarrow \; & l(e^{1-l} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \; & l = 0 \text{ ou } e^{1-l} = 1 \\ \Leftrightarrow \; & l = 0 \text{ ou } 1 - l = 0 \\ \Leftrightarrow \; & l = 0 \text{ ou } l = 1 \end{aligned}$$

Or $l \neq 0$, car la suite est croissante et minorée par 0, d'où $l = 1$.
Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 3

Les résultats du baccalauréat, dans un établissement public donné, sont :

- 60% des candidats sont admis.
- Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.
- Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.

A « le candidat interrogé est admis au baccalauréat ».
M « la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 ».
1)a) $\overline{A}$ « le candidat interrogé n'est pas admis au baccalauréat ».

60% des candidats sont admis, donc 40% ne le sont pas. D’où $p(\overline{A})=\dfrac{40}{100}=\dfrac{4}{10}=0.4$

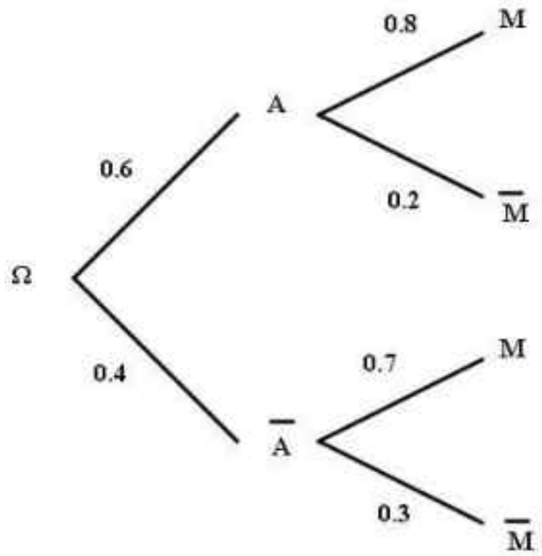
Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20. D’où la probabilité que la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 sachant qu’il est admis au baccalauréat est $p(M/A)=\dfrac{80}{100}=0.8$.

Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20. D’où la probabilité que la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 sachant qu’il n’est pas admis au baccalauréat est

$p(M/\overline{A})=\dfrac{70}{100}=0.7$.

b) $p(\overline{M}/A)=1-p(M/A)=1-0.8=0.2=\dfrac{1}{5}$.

2) L’arbre pondéré suivant décrit la situation.



3)a) La probabilité qu’un candidat interrogé soit admis et que sa moyenne annuelle soit inférieure à 10 sur 20 est donnée par $p(\overline{M}\cap A)=p(A).p(\overline{M}/A)=0.6\times 0.2=0.12$.

b) $p(M)=p(M\cap A)+p(M\cap\overline{A})$

$= p(A).p(M/A)+p(\overline{A}).p(M/\overline{A})$

$= 0.6\times 0.8+0.4\times 0.7$

$= 0.48+0.28$

$= 0.76$

c) La probabilité qu’un candidat interrogé soit admis sachant qu’il a obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $p(A/M)$.

$p(A/M)=\dfrac{p(M\cap A)}{p(M)}=\dfrac{0.48}{0.76}=\dfrac{48}{76}=\dfrac{12}{19}$. ($p(M\cap A)=p(A).p(M/A)=0.48$))

4) On sait que le nombre de candidats de cet établissement est égal à 200.

La probabilité qu'un candidat soit admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $p(\overline{M} \cap A) = 0.12$.

Le nombre estimé de candidats admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $200 \times 0.12 = 24$ candidats.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty\ [$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2\ln(x) & ;\ \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - 2x^2\ln(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - 2x(x\ln(x)) = 0 = f(0).$

D'où f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} x - 2x\ln(x) = 0.$ D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = 0.$

$f'(0) = 0,$ d'où la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x^2\ln(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2(1 - 2\ln(x)) = -\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x^2\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x - 2x\ln(x) = \lim_{x \to +\infty} x(1 - 2\ln(x)) = -\infty.$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, d'où la courbe (C) admet une branche infinie de direction l'axe $(O, \vec{j})$.

3)a) $f(x) = x^2 - 2x^2\ln(x) \quad ;\ \text{si } x > 0.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - (2x^2)'.\ln(x) - 2x^2.(\ln(x))' \\ &= 2x - 4x.\ln(x) - 2x^2.\frac{1}{x} \\ &= 2x - 4x.\ln(x) - 2x \\ &= -4x.\ln(x) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in]0, +\infty[\ ;\ f'(x) = -4x\ln(x).$

b) On a $f'(x) = -4x\ln(x)\ ;$ pour tout $x > 0.$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-\ln(x)$.

Le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	0	+	0	−	
f	0	↗	1	↘	$-\infty$

4) On a $f(0)=0$.

si $x>0$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x^2\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow x^2(1-2\ln(x))=0$

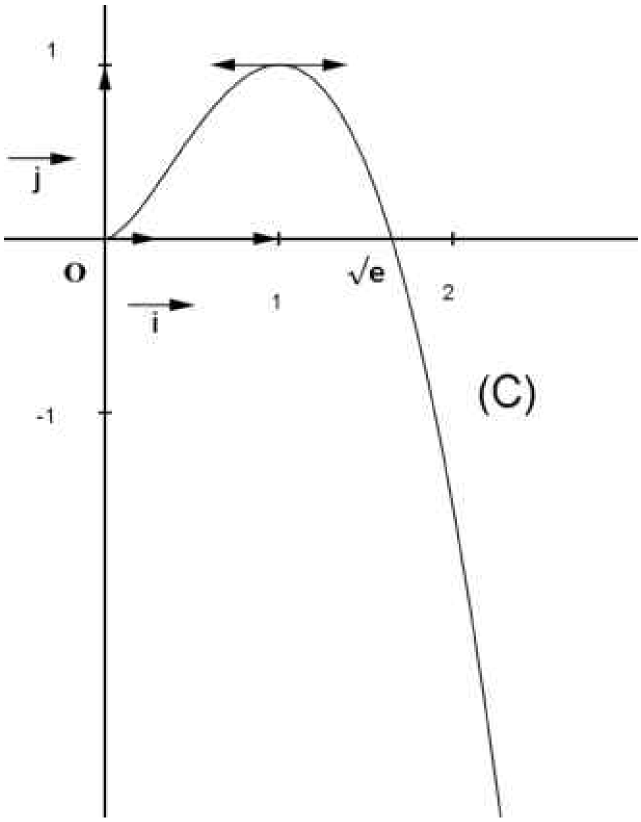
$\Leftrightarrow 1-2\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

Les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $(O,\vec{i})$ sont 0 et $\sqrt{e}$.

5) La courbe (C) de f :



6) Soit λ un réel tel que : $0<\lambda<\sqrt{e}$.

a) $I=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x)\, dx.$

On pose : $u(x)=\ln(x) \Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$v'(x)=x^2 \Rightarrow v(x)=\dfrac{1}{3}x^3$

En appliquant la formule d'intégration par parties on a :

$$I=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x)\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3}\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\, dx$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{e})^3\ln(\sqrt{e})-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{1}{6}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{9}\left[(\sqrt{e})^3-\lambda^3\right]$$

$$=\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{1}{18}e\sqrt{e}$$

b) $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\sqrt{e}$. On a $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x)\, dx.$

$$\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x)\, dx = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}}\left(x^2-2x^2\ln(x)\right)dx=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\, dx-2I=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}-2I=\frac{1}{3}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3-2I$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x)\, dx=\frac{1}{3}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3-2I=\frac{1}{3}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3-2\left(\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{1}{18}e\sqrt{e}\right)$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=-\frac{5}{9}\lambda^3+\frac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{2}{9}e\sqrt{e}$$

c) $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}-\dfrac{5}{9}\lambda^3+\dfrac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\dfrac{2}{9}e\sqrt{e}=\dfrac{2}{9}e\sqrt{e}$.