Session principale Bac 2014
Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = +\infty.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(1+e^{x})} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right)\frac{-1}{(1+e^{x})} = -\infty.$$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O, \vec{j})$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1+e^{x}) - e^{-x}e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \dfrac{-e^{-x}-2}{(1+e^{x})^2} = -\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}.$

b) Pour tout réel x, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$ → $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

3) a) $(T) : y = f'(0)x + f(0) = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}.$

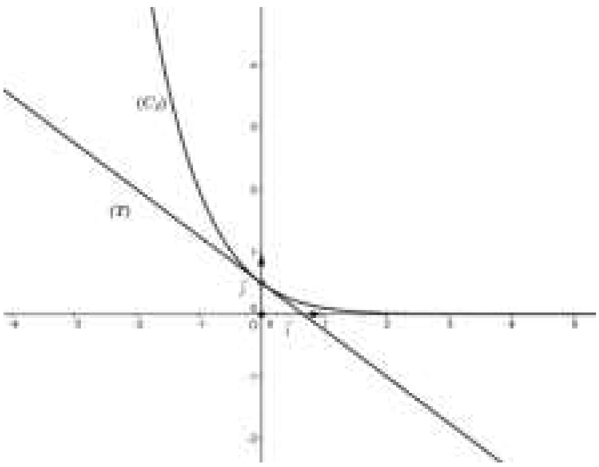
b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\dfrac{3}{4}$		$-$	0	$+$	
$f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$		↘	0	↗	

La fonction $x \mapsto f(x) + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 donc pour tout réel x,

$f(x) + \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (T).

c)



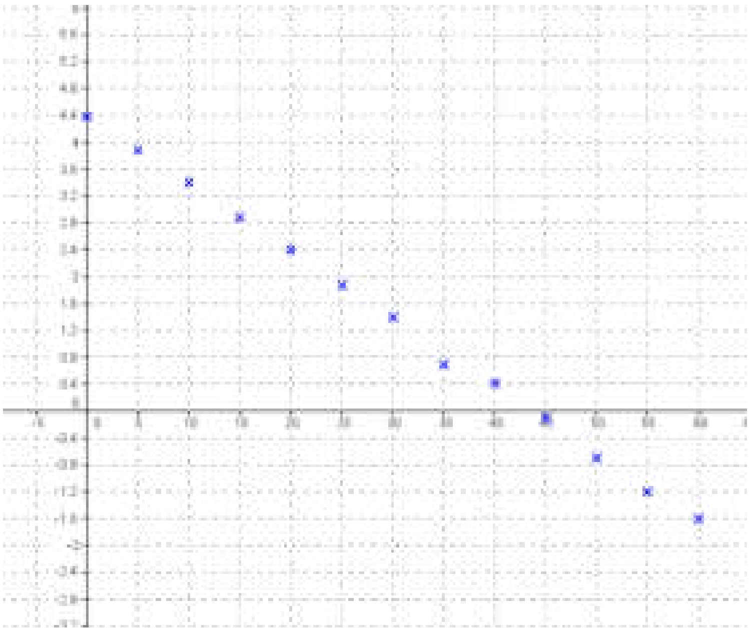
4) a) Pour tout réel x, $e^{-x} - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}} = f(x)$.

b) $A_\lambda = \int_0^\lambda f(x)dx = \int_0^\lambda \left(e^{-x} - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx = \left[-e^{-x} + \ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^\lambda = \left(-e^{-\lambda} + \ln\left(1+e^{-\lambda}\right) + 1 - \ln 2\right)$ ua.

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} -e^{-\lambda} + \ln\left(1+e^{-\lambda}\right) + 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2$.

Exercice 2

1) a)



b) $\rho_{t,\theta} = \dfrac{\mathrm{cov}(t,\theta)}{\sigma_t\sigma_\theta} = -0,99.$ Il y a une forte corrélation de plus le nuage a la forme d'une droite donc $\left|\rho_{t,\theta}\right| = 0.99 > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

un ajustement affine est justifié.

2) a) $(D): \theta = bt + a$ avec $b = \dfrac{\mathrm{cov}(t,\theta)}{\sigma_t^2} = -0.1$ et $a = \bar{\theta} - b\bar{t} = 4,39$.

Il en résulte que : $(D): \theta = -0.1t + 4,39$.

b) $\theta = \ln(T-20) \Leftrightarrow T = 20 + e^{\theta} = 20 + e^{-0.1t+4,39} = 20 + 80.6e^{-0.1t}$

c) Pour $t = 90$, $\theta = 20 + 80.6e^{-0.1\times 90} = 20$ C.

d) $T = 18 \Leftrightarrow 20 + 80.6e^{-0.1t} = 18 \Leftrightarrow e^{-0.1t} = \dfrac{-2}{80.6} < 0$ impossible donc la température n'atteindra jamais 18°C.

Exercice 3

1) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $d(O,P) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}$ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D:\begin{cases}x=t\\y=2t, t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$

$$I(x,y,z)\in D\cap P \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\x+2y+z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t\\6t-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\x=1\\y=2\\z=1\end{cases}$$
, il en résulte que $I(1,2,1)$.

2) a) $\begin{cases}2^2+0^2+2^2-8=0\\2+0+2-6=-2\neq 0\end{cases}$ donc $A\in S$ et $A\notin P$.

$\begin{cases}2^2+2^2+0^2-8=0\\2+4+0-6=0\end{cases}$ donc $B\in S$ et $B\in P$ donc B appartient à $(\mathscr{C})$.

b) $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2 \Leftrightarrow y=z.$

c) $\overline{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\overline{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\neq\bar{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta:\begin{cases}x+2y+z-6=0\\y=z\end{cases}$, on pose

$y=\alpha\in\mathbb{R}$, on aura $\Delta:\begin{cases}x=-3\alpha+6\\y=\alpha\\z=\alpha\end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA=CB=AB.$
$CA=CB$ donc C est un point de Q et C appartient à $(\mathscr{C})$ qui est contenu dans P donc C est un point de Δ, il en résulte qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha+6,\alpha,\alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral , il suffit que $CA=AB \Leftrightarrow CA^2=AB^2 \Leftrightarrow$

$(4-3\alpha)^2+\alpha^2+(\alpha-2)^2=8 \Leftrightarrow \alpha=2$ ou $\alpha=\dfrac{6}{11}$. soit $C(0,2,2)$.

Exercice 4

1) a) $z_1+z_2=-i\sqrt{3}$ et $z_1\times z_2=-2.$

b) $\begin{cases}z_1+z_2=-i\sqrt{3}\\z_1\times z_2=-2\end{cases}$ donc z_1 et z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+i\sqrt{3}z-2=0$, il en résulte que $z^2+i\sqrt{3}z-2=(z-z_1)(z-z_2)$ où $z\in\mathbb{C}$.

2) a) $OM_1=|z_1|=\sqrt{2}$ et $OM_2=|z_2|=\sqrt{2}$ donc M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) $\dfrac{z_1+z_2}{2}=-i\sqrt{3}=z_H$

c) Voir figure.

3) a) $K=M*N \Leftrightarrow \dfrac{z+z^3}{2}=-i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3+z+2i\sqrt{3}=0.$

b) Il suffit de développer.

c) $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z^2 + i\sqrt{3}z - 2\right) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = z_1$ ou $z = z_2$.,

$S_{\mathbb{C}} = \left\{i\sqrt{3}, z_1, z_2\right\}$

d) Puisque z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc N_1 et N_2 sont les symétriques respectifs de M_1 et M_2 par rapport à K.

e) a est la troisième solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc $a = i\sqrt{3}$.