| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◈◈◈<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION DE JUIN **2014** | Epreuve : **MATHEMATIQUES**<br>Durée : 3 H<br>Coefficient : 3 |
|---|---|
| **Section : Sciences expérimentales** | **Session principale** |

**Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.**

## Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de $C_f$ et (T).

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)+\frac{3}{4}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

c) Tracer (T) et $C_f$.

4) Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On désigne par $A_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $C_f$, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $A_\lambda=-e^{-\lambda}+\ln(1+e^{-\lambda})+1-\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

## Exercice 2 (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les 5 minutes, la température T de ce liquide.

Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C :

| t (en mn) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T (en °C) | 100 | 68.5 | 50 | 37.8 | 31 | 26.5 | 24 | 22 | 21.5 | 20.9 | 20.5 | 20.3 | 20.2 |

On pose $\theta = \ln(T-20)$.

Les valeurs de $\theta$, arrondies à $10^{-2}$ près, sont données dans le tableau qui suit :

| t (en mn) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | 4.38 | 3.88 | 3.40 | 2.88 | 2.40 | 1.87 | 1.39 | 0.69 | 0.41 | - 0.10 | - 0.69 | -1.2 | -1.60 |

1) a) Construire le nuage de points de la série $(t, \theta)$, dans le repère proposé dans l'annexe ci-jointe **(figure 1)**.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série $(t, \theta)$. Interpréter le résultat.

2) a) Donner une équation de la droite de régression de $\theta$ en t.

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à $10^{-2}$ près).

b) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + \alpha e^{\beta t}$,

$\alpha$ et $\beta$ étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à $10^{-1}$ près.

c) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.

d) La température de cette tasse de café atteindra t- elle 18°C ? Expliquer.

**Exercice 3 (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ et le plan P d'équation $x + 2y + z - 6 = 0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $MA = MB$.

Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite $\Delta$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

**Exercice 4 (6 points)**

1) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe $z$, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)**, on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que $M_1$ et $M_2$ appartiennent au cercle (C).

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points $M_1$ et $M_2$.

3) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives $z$ et $z^3$.

a) Montrer que :

( K est le milieu du segment [M N] ) si et seulement si ( $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ ).

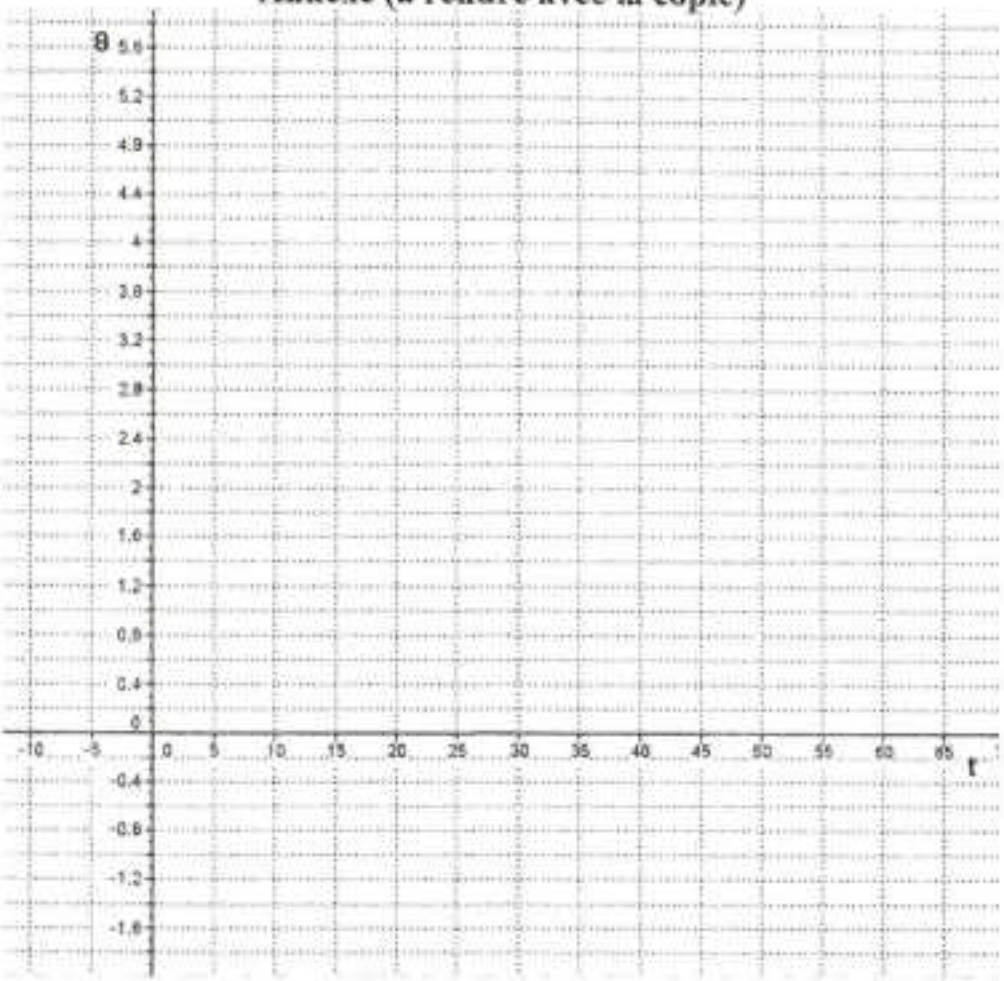
b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

d) Construire alors les points $N_1$ et $N_2$ d'affixes respectives $z_1^3$ et $z_2^3$ (On rappelle que $z_1$ et $z_2$ sont les affixes des points $M_1$ et $M_2$).

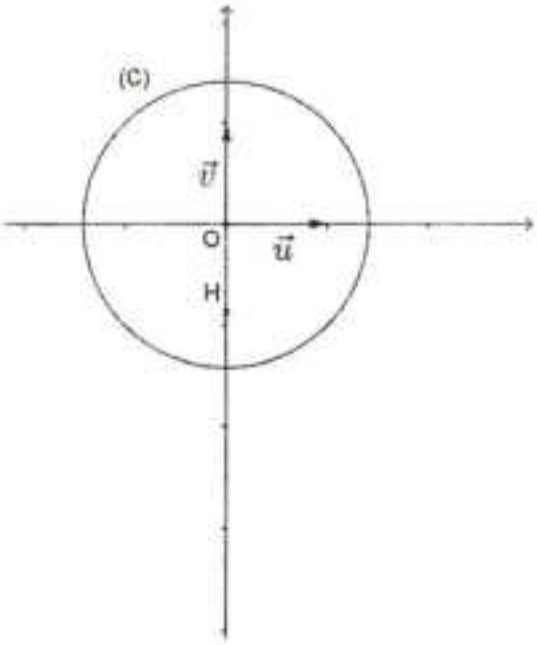
e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe $a^3$.

## Annexe (à rendre avec la copie)




**(figure 1)**

---




**(figure 2)**