

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75, une réponse fautive ou l'absence d'une réponse vaut 0 point.

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2^n}{3+2^n}$ est égale à :

a) $\frac{1}{3}$

b) 1

c) $+\infty$

2) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \left(\frac{e-1}{e}\right)^n$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

L'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est égal à :

a) 0,77

b) 0,86

c) 0,14

4) Y est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

L'écart type $\sigma(Y)$ est égal à :

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{16}{9}$

c) $\frac{8}{3}$

Exercice 2 (5 points)

1) Soit, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation (E) :

$$2z^2 - (1 + i(\sqrt{3} - 2))z + \sqrt{3} - i = 0.$$

a- Vérifier que $(-i)$ est une solution de l'équation (E).

b- Déduire l'autre solution.

c- Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne

les points A, B, E et F d'affixes respectives $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$; 1 et $-i$.

- a- Placer dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) les points, E, F et A.
 - b- Vérifier que $b - a = i(a + i)$.
 - c- En déduire que le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.
- 3) Construire le point B dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

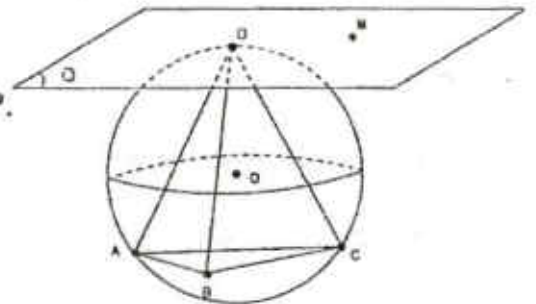
Exercice 3 (6 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$.

- 1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
 - b- Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 3 = 0$.
- 2) Soit la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
- a- Vérifier que A, B et C sont des points de la sphère S.
 - b- Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.
- 3) Soit le point D de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$.

On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

- a- Déterminer une équation cartésienne du plan Q.
 - b- Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.
- 4) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.



- a- Calculer $(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM}$.
- b- Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x + y + z - 3|}{3}$.
- c- En déduire que pour tout point M du plan Q ; $V = \sqrt{\frac{5}{3}} - 1$.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a- En utilisant l'égalité : $x \ln^2 x = (\sqrt{x} \ln x)^2$ pour tout $x \in]0, +\infty[$; montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0.$$

b- En déduire que f est continue à droite en 0.

c- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3) Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) :

- la courbe Γ de la fonction dérivée f' de f .
- la tangente Δ à la courbe ζ au point $A(1,2)$.

On sait que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e et qu'elle admet au point $B(1,-1)$ une tangente horizontale.

Par une lecture graphique :

a- Déterminer le signe de f' sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f .

b- Montrer que A est un point d'inflexion de la courbe ζ .

4) Tracer la courbe ζ de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de l'annexe ci-jointe.

5) Soit $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

On désigne par \mathcal{A}_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{e}$.

Montrer que $\mathcal{A}_\lambda = 1 + \frac{4}{e} - f(\lambda)$ et en déduire $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}_\lambda$.

Epreuve de mathématiques – Section Sciences Techniques

Feuille à rendre avec la copie

