MATHÉMATIQUES

Section : Sciences Expérimentales
Session de contrôle : juin 2015

Exercice 1 (5 points)

1/ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=25$. Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $R=5$.

2/ a) $\vec{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{JM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$. $M\in(P) \Leftrightarrow \vec{JI}.\vec{JM}=0 \Leftrightarrow 2x-2y--z+5=0$. Il en résulte que (P) est le plan d'équation $2x-2y--z+5=0$.

b) $d(I,P)=\dfrac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}}=3<5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J\in(P)$ et $\overline{JI}$ est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\vec{AI}\begin{pmatrix}6\\-6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{JI}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overline{AI}=3\overline{JI}$ par suite les vecteurs $\overline{AI}$ et $\overline{JI}$ sont colinéaires, d'où $A\in(IJ)$.

b) $AJ=\sqrt{16+16+4}=6$.

4/ a) On sait que $\begin{cases}A\in(IJ)\\(IJ)\perp(P) \text{ en } J\\M\in(C)\subset(P)\end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM=\sqrt{AJ^2+JM^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$.

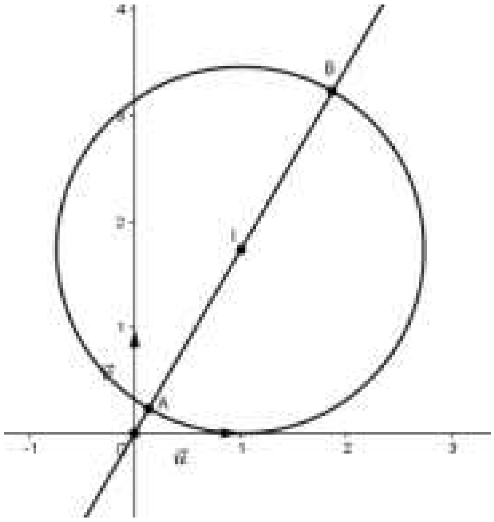
c) Pour tout M du cercle (C), $AM=2\sqrt{13}$ donc $M\in(S')$, il en résulte que $(C)\subset(S')$ et puisque $(C)\subset(P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

Exercice 2 (5 points)

1/ a) $\Delta=\left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2-4e^{i\frac{2\pi}{3}}=12e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

b) Soit $\delta=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$z'=\frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}-2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}=\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$



$$z'' = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}} + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2/ a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

b) $OA = OI - IA = 2-\sqrt{3}.$

$OB = OI + IB = 2+\sqrt{3}.$

c) $|z_A| = OA = 2-\sqrt{3}$ et $\arg(z_A) \equiv \left(\vec{u},\vec{OA}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u},\vec{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$

Il en résulte que $z_A = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$

$|z_B| = OB = 2+\sqrt{3}$ et $\arg(z_B) \equiv \left(\vec{u},\vec{OB}\right)[2\pi] \equiv \left(\vec{u},\vec{OI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$

Il en résulte que $z_B = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$

Exercice 3 (6 points)

1/ a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. le signe est celui de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	↘		↗	

b) $g(1) = 1$. La fonction g admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 1 égal à 1, il en résulte que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty.$

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = 2-2\frac{\ln x}{x} = 2\frac{(x-\ln x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}.$$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

3/ a) Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 1, alors T à pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x$.

Il en résulte que Δ est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-(\ln x)^2\right] = +\infty \end{cases}$. On en déduit que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) - 2x = \left[-(\ln x)^2\right] \leq 0$ donc C_f est au-dessous de la droite Δ et le point de coordonnées $(1,2)$ est un point d'intersection.

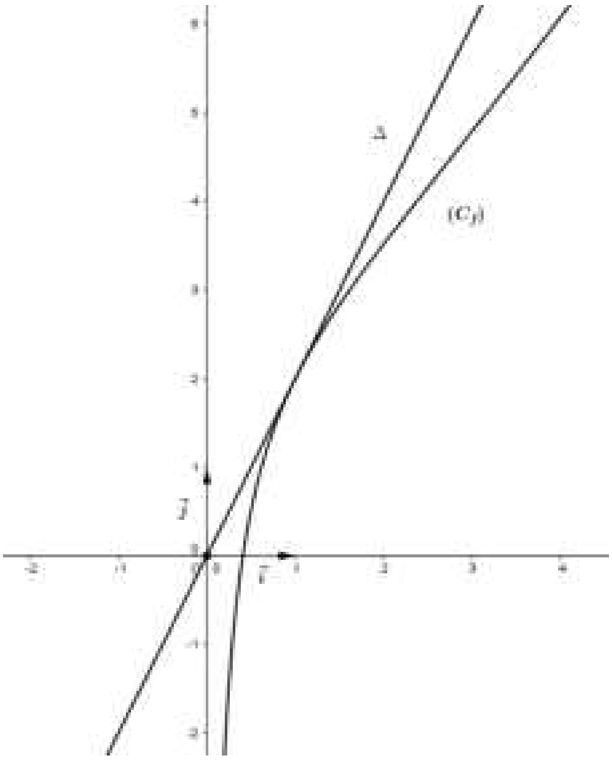
4/ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[) =$.

$0 \in$ _ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{4}\right) \quad -1.4 < 0 \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad 0.5 > 0 \end{cases}$. Il en résulte que $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

b)



c) $A = \int_1^e |f(x) - 2x| dx = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

On pose $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$

$$A=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=(e-2)\text{ua}.$$

<u>Exercice 4 (4 points)</u>

1/ a) $u_1=qu_0=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

b) La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

c) S_n est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ donc

$$S_n=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

2/ La fonction h est dérivable sur et $h'(x)=e^x-1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$h(0)=0.$ La fonction h admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 0 égal à 0, il en résulte que pour tout $x\in$, $h(x)\geq 0$, on en déduit que $e^x\geq x+1$.

3/ a) $v_0=1+u_0=\frac{4}{3}$ et $v_1=(1+u_0)(1+u_1)=\frac{40}{27}$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-v_n=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1})-(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)$

$$=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)(1+u_{n+1}-1)=(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n)u_{n+1}>0$$

car $u_n=q^nu_0=\frac{1}{3^{n+1}}>0$ pour tout entier naturel n.

Ainsi la suite (v_n) est croissante.

c) D'après 2/ on a pour tout entier k, $1+u_k\leq e^{u_k}$.

Pour $k=0,\ 0<1+u_0\leq e^{u_0}$

Pour $k=1,\ 0<1+u_1\leq e^{u_1}$

.

.

.

Pour $k=n,\ 0<1+u_n\leq e^{u_n}$

En multipliant membre à membre, on obtient $(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_n) \le e^{u_0+u_1+....u_n}$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $v_n \le e^{S_n} = e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

d) La suite (v_n) est croissante et pour tout entier naturel n, $v_n \le e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)} \le e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ car $0 < 1 - \dfrac{1}{3^{n+1}} < 1$

donc elle est majorée par $\sqrt{e}$, il en résulte qu'elle est convergente.

e) On sait que $v_n \le \sqrt{e}$ de plus la suite (v_n) est croissante donc $v_n \ge v_0 = \dfrac{4}{3} > 1$, ainsi $1 < v_n \le \sqrt{e}$ et puisque (v_n) est convergente vers l et par passage à la limite, on obtient $1 \le v_n \le \sqrt{e}$.