

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> SESSION <b>2015</b>	Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b>
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : <b>Sciences expérimentales</b>	<b>Session principale</b>

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

**Exercice 1 : (5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1,1,0)$ ,  $B(1,-1,2)$ ,  $C(0,1,1)$  et  $D(1,1,4)$ .

- 1/ a) Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan qu'on notera  $(P)$ .
- b) Justifier que  $(P)$  est d'équation  $x + y + z - 2 = 0$ .
- c) Vérifier que  $D$  n'appartient pas au plan  $(P)$ .

2/ Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $H$  le milieu du segment  $[AB]$ .

- a) Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .
- b) En déduire que  $H$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$ .

3/ Soit  $\Delta$  la droite perpendiculaire au plan  $(P)$  passant par le point  $H$ .

Justifier qu'une représentation paramétrique de  $\Delta$  est 
$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

4/ Soit  $M$  un point de  $\Delta$ .

- a) Justifier que  $MA = MB = MC$ .
- b) Montrer qu'il existe un unique point  $I$  de  $\Delta$  tel que  $IA = ID$ .

Donner ses coordonnées.

- c) Déduire de ce qui précède, que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  appartiennent à une même sphère  $(S)$  dont on précisera le centre et le rayon.

## **Exercice 2 : (5 points)**

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**),  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct du plan et  $(C)$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

1/ Soit  $A$  le point d'affixe  $a = 1 + i\sqrt{2}$ .

a) Montrer que  $A$  appartient au cercle  $(C)$ .

b) Placer  $A$ .

2/ On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 6i\sqrt{2} = 0$ .

a) Montrer que le discriminant  $\Delta$  de l'équation (E) est égal à  $12a^2$ .

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \sqrt{3}[-1 + i(1 - \sqrt{2})] \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}[1 + i(1 + \sqrt{2})]$$

3/ On considère le point  $K$  d'affixe  $z_K = i\sqrt{3}$  et on désigne par  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

a) Vérifier que  $K$  est le milieu du segment  $[M_1M_2]$ .

b) Montrer que  $\frac{z_2 - z_1}{a} = 2\sqrt{3}$ .

En déduire que la droite  $(M_1M_2)$  est parallèle à la droite  $(OA)$ .

c) Montrer que  $M_1M_2 = 6$ .

d) Placer le point  $K$  et construire alors les points  $M_1$  et  $M_2$ .

## **Exercice 3: (3 points)**

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale  $C$ , exprimée en  $\text{cm}^3$ , chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille  $t$  exprimée en  $\text{cm}$ .

t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en $\text{cm}^3$ )	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1/ a) Donner une valeur approchée à  $10^{-5}$  près du coefficient de corrélation linéaire entre  $t$  et  $C$ .

- b) Justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série  $(t, C)$ .
- c) Donner une équation de la droite de régression de  $C$  en  $t$ . (Les coefficients seront arrondis à  $10^{-2}$  près).
- d) Déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm ?

2/ En fait, la capacité vitale  $C$  (exprimée en  $\text{cm}^3$ ) chez l'homme dépend de sa taille  $t$  (exprimée en cm) et de son âge  $g$  (exprimé en années).

De nombreuses expériences ont permis d'exprimer  $C$  en fonction de  $t$  et  $g$  selon la relation  $(R) : C = \alpha t + \beta g + 754$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes (ne dépendant pas de  $t$  et  $g$ ).

- a) Donner l'expression de  $C$  pour  $g = 40$ .
- b) En déduire, en utilisant 1/ c), les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

3/ Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant 188 cm.

#### **Exercice 4 : (7 points)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ .

- b) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes que l'on précisera.
- c) Etudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

2/ a) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{(x^2 - 1) + \ln x}{x^2}$ .

b) Montrer que

$(x^2 - 1)$  et  $\ln x$  sont de même signe sur chacun des intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

c) En déduire le signe de  $f'(x)$  sur chacun des intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation  $f'(x) = 0$ .

e) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ a) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une unique tangente  $D$  parallèle à la droite  $\Delta$ .

Préciser les coordonnées du point  $B$ , point de contact de  $\mathcal{C}$  et  $D$ .

b) Donner une équation de  $D$ .

4/ Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 2**), on a tracé relativement au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,

la droite  $\Delta$  et la courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

a) Soit le point  $A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$ .

Placer le point  $A$  et vérifier que  $A$  appartient à  $D$ .

b) Tracer la droite  $D$  et placer le point  $B$ .

c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

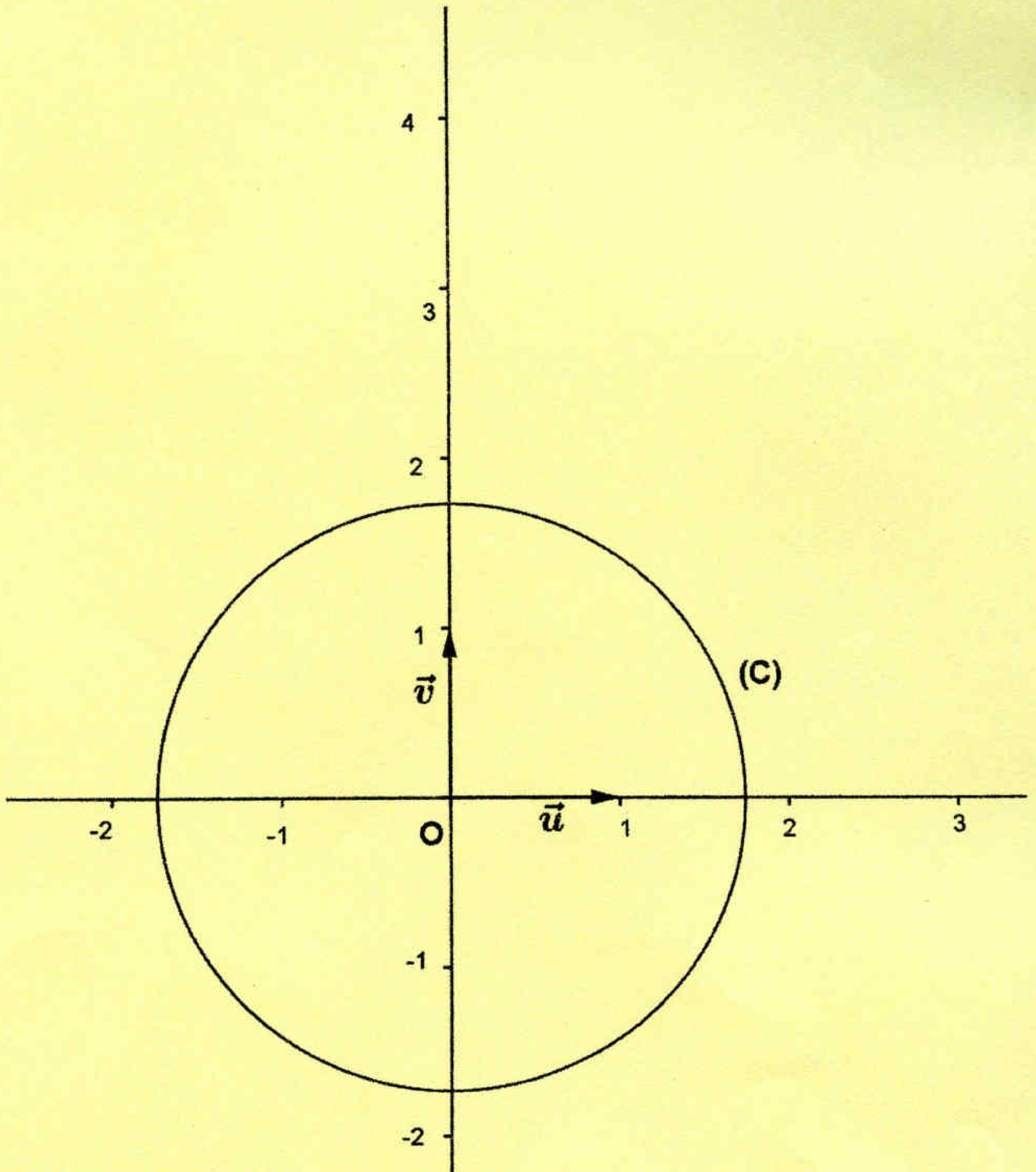
5/ Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites

d'équations  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = e$ .

Calculer  $\mathcal{A}$ .

Annexe (à rendre avec la copie)

(Figure 1)





(Figure 2)

