

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

	I)	II)	III)
1)	2)	a	b
b	c		

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. Les points $A(4,0,0)$; $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$.

1)a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, d'où les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Par conséquent les points A, B et C déterminent un plan P.

Un vecteur normal à ce plan est $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$, d'où une équation du plan P est de la

forme $16x + 16y + 16z + c = 0$.

$A(4,0,0) \in P$, d'où $16 \times 4 + 16 \times 0 + 16 \times 0 + c = 0$, donc $c = -64$.

P: $16x + 16y + 16z - 64 = 0$. Ainsi P: $x + y + z - 4 = 0$.

c) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \times 16^2} = 8\sqrt{3}$.

2)a) $G(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$; $\vec{GA} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $\vec{GB} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $\vec{GC} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$. Il est clair que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

D'où G est le centre de gravité du triangle ABC.

b) Le vecteur $\vec{OG} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal au plan P, or le plan P est le

plan (ABC). Donc la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC) en G.

Ainsi [OG] est la hauteur issue de O du tétraèdre OABC.

3) I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$.

a) En appliquant le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a :

(KI) est parallèle à (AB) et $KI = \frac{1}{2} AB$, en prenant compte du sens on a $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$.

De même on a $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \right) \wedge \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{CA} \right) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Remarque : On pourra utiliser les coordonnées pour établir les relations.

$$\begin{aligned} \text{b) L'aire du triangle IJK} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{KI} \wedge \overrightarrow{KJ}\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \right) \\ &= \frac{1}{4} (\text{aire du triangle ABC}) = \frac{1}{4} \times 8\sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

4) V et V', respectivement, les volumes des tétraèdres OABC et OIJK.

On peut remarquer que G est aussi le centre de gravité du triangle IJK et que $[OG]$ est la hauteur issue de O du tétraèdre OIJK.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (\text{aire du triangle ABC}) \times OG \\ &= 4 \times \frac{1}{3} (\text{aire du triangle IJK}) \times OG = 4V' \end{aligned}$$

$$\text{D'où } V' = \frac{1}{4} \times V.$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1-x)e^x$.

$$1) \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x e^x = 0, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) e^x = -\infty.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, d'où la courbe (C) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe (O, j) au voisinage de $(+\infty)$.

2) a) $f(x) = (1-x)e^x, x \in \mathbb{R}$. On a f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)e^x = -e^x + (1-x)e^x = -x e^x, x \in \mathbb{R}.$$

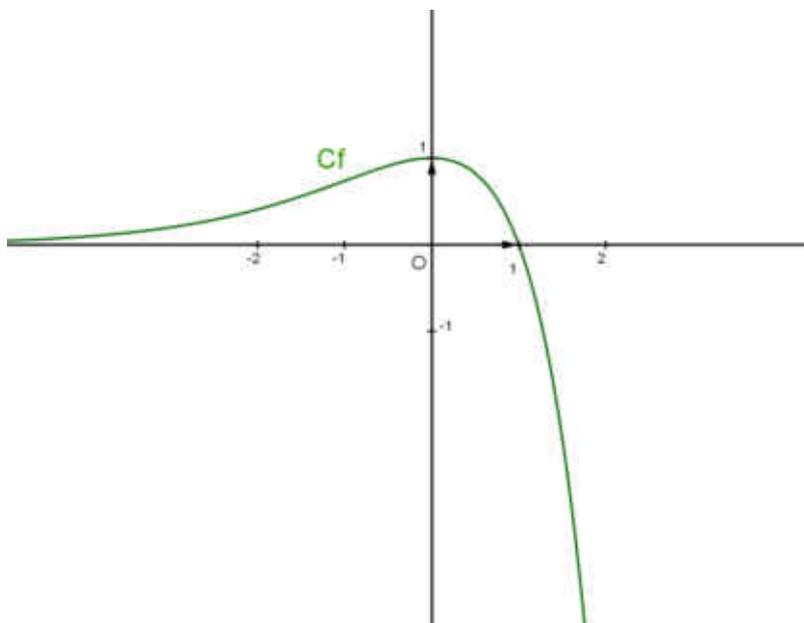
$$\text{b) } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f			1		

0 \nearrow \searrow $-\infty$

c)



$$3)a) e^x f(x) + f'(x)f(x) = [e^x + f'(x)] f(x) = [e^x - x e^x] f(x) = [(1-x)e^x] f(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2.$$

b) Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = \frac{1}{4}(3-2x)e^{2x}$.

La fonction H est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{4}(3-2x)'e^{2x} + \frac{1}{4}(3-2x)2e^{2x} \\ &= -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}(3-2x)e^{2x} \\ &= e^{2x} - x e^{2x} = e^x(1-x)e^x = e^x f(x). \end{aligned}$$

On a $H'(x) = e^x f(x)$, d'où H est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto e^x f(x)$.

c) V est le volume de révolution du solide engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de la partie du plan limitée par la courbe (C), et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 [e^x f(x) + f'(x)f(x)] dx \\ &= \pi \left[H(x) + \frac{1}{2}(f(x))^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \left[H(1) + \frac{1}{2}(f(1))^2 - H(0) - \frac{1}{2}(f(0))^2 \right] \\ &= \pi \left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{4}(e^2 - 5) \text{ unité de volume.} \end{aligned}$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -z_B$.

$$1) a) z_A = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

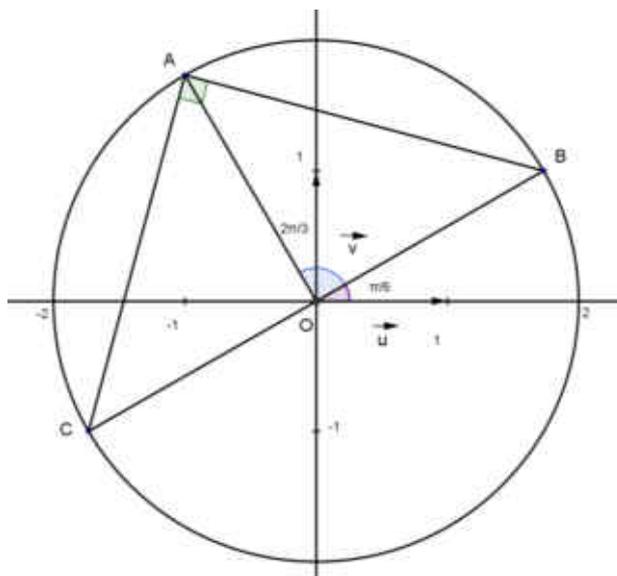
$$z_B = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$z_C = -z_B = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

$$b) OA = |z_A| = \left| 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \right| = 2 ; OB = |z_B| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = 2 ; OC = |z_C| = \left| 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \right| = 2.$$

On a $OA = OB = OC$, d'où les points A, B et C appartiennent au cercle ζ de centre O et de rayon 2.

c)



2) a) On a $z_C = -z_B$ d'où O est le milieu du segment $[BC]$. D'autre part, les points B et C sont sur le cercle ζ de centre O, donc $[BC]$ est un diamètre de ce cercle.

A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ d'où BAC est un angle droit et par conséquent le triangle ABC est rectangle en A.

b) L'aire du triangle BAC est égale à $\frac{AB \times AC}{2}$.

$$\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| = \left| \sqrt{3} + i - (-1 + i\sqrt{3}) \right| \\ &= \left| \sqrt{3} + 1 + i(1 - \sqrt{3}) \right| = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-\sqrt{3} - i - (-1 + i\sqrt{3})|$$

$$= |-\sqrt{3} + 1 + i(-1 - \sqrt{3})| = \sqrt{(-\sqrt{3} + 1)^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

L'aire du triangle BAC est égale à $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4$ unité d'aire.

Autrement (moins de calcul):

On peut remarquer que BOA est un angle droit (une mesure de $\text{BOA} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$), d'où [OA] est la hauteur issue de A du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC est donc, $\frac{BC \times OA}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$ unité d'aire.

3) M est un point du plan, $z_M = 2e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right[$. S l'aire du triangle MBC.

a) $OM = |z_M| = |2e^{i\theta}| = 2$, d'où le point M appartient au cercle ζ .

On a M appartient au cercle de diamètre [BC], d'où MBC est un triangle rectangle en M.

$$b) S = \frac{MB \times MC}{2} = \frac{|z_B - z_M| \times |z_C - z_M|}{2} = \frac{|z_B - z_M| \times |-z_B - z_M|}{2}$$

$$= \frac{|(z_B - z_M)(z_B + z_M)|}{2} = \frac{|z_B^2 - z_M^2|}{2} = \frac{\left| \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^2 - \left(2e^{i\theta} \right)^2 \right|}{2} = \frac{|4e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{2i\theta}|}{2} = 2 \left| e^{2i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right|.$$

$$c) e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right) = e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})} \cdot e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})}$$

$$= e^{i(\theta + \frac{\pi}{6}) + i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{6}) - i(\theta - \frac{\pi}{6})} = e^{i2\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$d) S = 2 \left| e^{2i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 2 \left| e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})} \left(e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right) \right| = 2 \left| e^{i(\theta + \frac{\pi}{6})} \right| \times \left| e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right| = 2 \left| e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right|$$

D'autre part les nombres complexes $e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$ et $e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})}$ sont des conjugués, d'où

$$e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} = 2i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right). \text{ Ainsi } S = 2 \left| e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})} - e^{-i(\theta - \frac{\pi}{6})} \right| = 2 \left| 2i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right| = 4 \left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right|.$$

$$4) S = 4 \left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right|, \theta \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right[.$$

$$S \text{ est maximale} \Leftrightarrow \left| \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \left(\theta \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right[, \text{ donc } \theta - \frac{\pi}{6} \in]0, \pi[\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$