Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

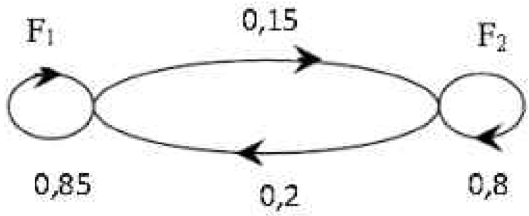
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

	I)		II)	
Question	1)	2)	1)	2)
Réponse	a	c	b	a

Exercice 2



1)a) La probabilité est passée auprès du fournisseur F_1. La probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante est $p(F_1/F_1)=0{,}85$.

b) La matrice de transition du graphe $M=\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}15\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

2) Pour tout entier naturel non n, on désigne par :

- a_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprès du fournisseur F_1 ».
- b_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprès du fournisseur F_2».
- $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

$$P\times M=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}15\\ 0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\times 0{,}85+\frac{3}{7}\times 0{,}2 & \frac{4}{7}\times 0{,}15-\frac{3}{7}\times 0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}=P.$$

$P\times M=P$, d'où la matrice P traduit l'état stable de la situation.

3) $P_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$; $M^n=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4+3(0{,}65)^n & 3-3(0{,}65)^n\\ 4-4(0{,}65)^n & 3+4(0{,}65)^n\end{pmatrix}$.

a) $7P_1M^{n-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4+3(0{,}65)^{n-1} & 3-3(0{,}65)^{n-1}\\ 4-4(0{,}65)^{n-1} & 3+4(0{,}65)^{n-1}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\ 4-3(0{,}65)^{n-1}-\frac{4}{7}\ 4-4(0{,}65)^{n-1} & \frac{3}{7}\ 3-3(0{,}65)^{n-1}+\frac{4}{7}\ 3+4(0{,}65)^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4-(0{,}65)^{n-1} & 3+4(0{,}65)^{n-1}\end{pmatrix}$$

b) $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = P_1 M^{n-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4-(0,65)^{n-1} & 3+(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$

$$\text{D'où } \begin{cases} a_n = \frac{1}{7}\left(4-(0,65)^{n-1}\right) \\ b_n = \frac{1}{7}\left(3-(0,65)^{n-1}\right) \end{cases}$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{7}\left(4-(0,65)^{n-1}\right) - \frac{1}{7}\left(3+(0,65)^{n-1}\right) = \frac{1}{7}\left(1-2(0,65)^{n-1}\right) = \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7}.$$

c) Le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_2 :

$$\begin{aligned} a_n > b_n &\Leftrightarrow a_n - b_n > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1-2(0,65)^{n-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow 2(0,65)^{n-1} < 1 \\ &\Leftrightarrow (0,65)^{n-1} < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow n-1 > -\frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \\ &\Leftrightarrow n > 1-\frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \simeq 2,61 \end{aligned}$$

D'où le rang $n = 3$.

Exercice 3

1)a) $f(0) = -1$; $f'(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2)a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, d'où g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

b) Voir figure.

3)a) $g(x) = (x-1)e^x$; $x \in [0, +\infty[$.

$g'(x) = (x-1)e^{x}\ '\ ;\ x \in 0,\ -\infty$

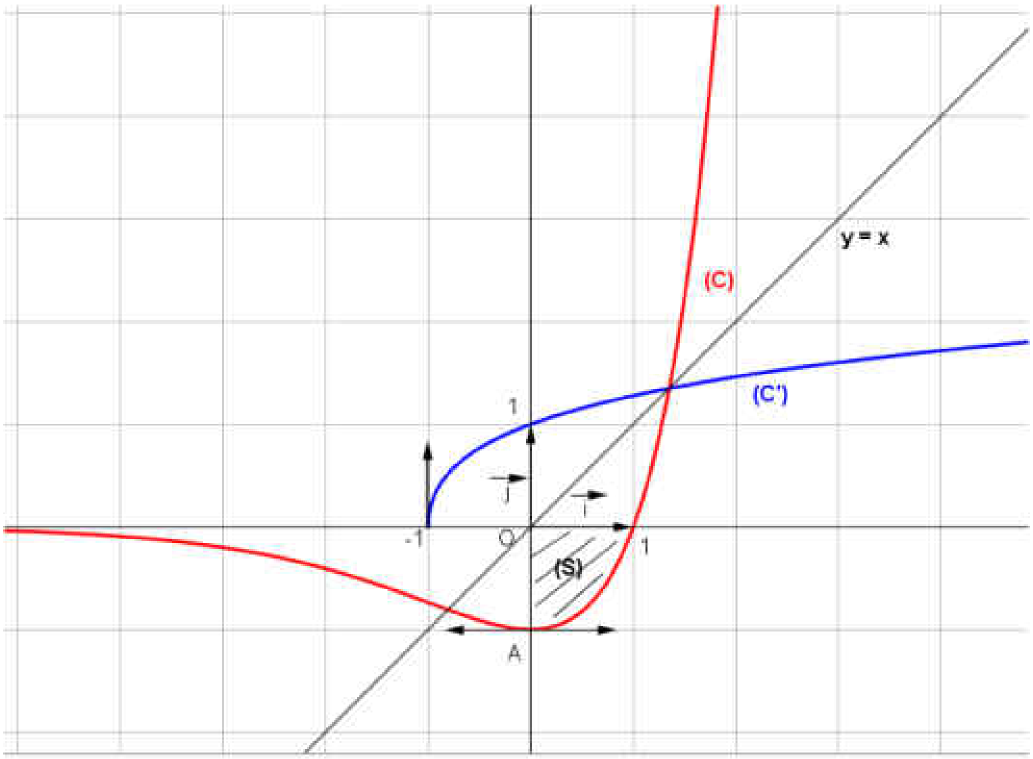
$= e^{x} + (x-1)e^{x} = e^{x} - g(x)$

D'où $g(x) = g'(x) - e^{x}$; pour tout $x \in 0,\ +\infty$.

b) $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 g'(x) \quad e^{x} \;\; dx = \left|g(x) \quad e^{x}\right|_0^1 = g(1) \quad e \quad g(0) \quad 1 = \quad e \quad 2 = 2 \quad e.$

4)a) (S) la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. Voir figure.

b) aire S $= \int_0^1 \quad g(x)\,dx = \quad \int_0^1 g(x)\,dx = e \quad 2$ u.a.



Exercice 4

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - 2 \ ;\ n \in IN \end{cases}$$

1)a) $U_1 = \dfrac{1}{3}U_0 + 2 = \dfrac{1}{3} \times 5 + 2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{6}{3} = \dfrac{11}{3}.$

$U_2 = \dfrac{1}{3}U_1 + 2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{11}{3} - 2 = \dfrac{11}{9} + \dfrac{18}{9} = \dfrac{29}{9}$

b) $U_2 - U_1 = \frac{29}{9} - \frac{11}{3} = \frac{29}{9} - \frac{33}{9} = -\frac{4}{9}$; $U_1 - U_0 = \frac{11}{3} - 5 = \frac{11}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{4}{3}$.

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$; d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{11}{3}}{5} = \frac{11}{15}$; $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{29}{9}}{\frac{11}{3}} = \frac{29}{9} \times \frac{3}{11} = \frac{29}{33}$

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$; d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 3$.

- $U_0 = 5 > 3$, d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in IN$ supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire $U_n > 3$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$U_n > 3 \Rightarrow \frac{1}{3}U_n > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}U_n + 2 > 3$

$\Rightarrow U_{n+1} > 3$; d'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n > 3$, pour tout $n \in IN$.

3) $V_n = \ln\ U_n \quad 3$; $n \in IN$

a) $V_{n+1} = \ln\ U_{n+1} - 3 = \ln\left(\frac{1}{3}U_n - 1\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{3}(U_n - 3)\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\ U_n - 3 = V_n - \ln 3$

Ainsi $V_{n+1} = V_n - \ln 3$; pour tout $n \in IN$

b) On a : $V_{n-1} = V_n \quad \ln 3$; pour tout $n \in IN$.

$V_1 = V_0 - \ln 3$

$V_2 = V_1 - \ln 3$

. . .

. . .

$V_{n-1} = V_{n-2} - \ln 3$

$V_n = V_{n-1} - \ln 3$

$V_1 + V_2 + ... - V_{n-1} + V_n = V_0 - V_1 - V_2 - ... + V_{n-2} - V_{n-1} - n\ln 3$

$\Leftrightarrow V_n = V_0 - n\ln 3 = \ln\ U_0 - 3\ - n\ln 3 = \ln 2 - n\ln 3$

c) On a : $V_n = \ln 2 - n\ln 3$; pour tout $n \in IN$

$$V_n = \ln 2 - n\ln 3 = \ln 2 - \ln 3^n = \ln\left(\frac{2}{3^n}\right) \text{ ; d'autre part } V_n = \ln\ U_n - 3 \quad ; \ n \in IN$$

$$\text{D'où } \ln\ U_n - 3 = \ln\left(\frac{2}{3^n}\right) \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{2}{3^n}$$

$$\Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{2}{3^n} \quad ; \text{ pour tout } n \in IN$$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 \quad \frac{2}{3^n}\right) = 3.$