Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session de contrôle 2016

Exercice 1

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

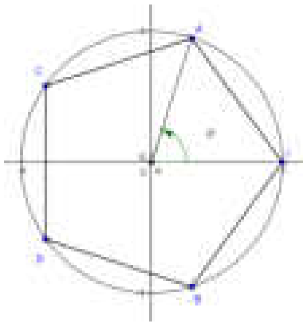
b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que

$d\left(E,(OIJ)\right)=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.



Exercice 2

1) a) $a=e^{i\theta}$, $\bar{a}=e^{-i\theta}$, $a^2=e^{2i\theta}$ et $\bar{a}^2=e^{-2i\theta}$.

b) Voir figure.

2) a) $a+\bar{a}=2\operatorname{Re}(a)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) $a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1=a^2-a\left(a+\bar{a}\right)+1=a^2-a^2-\left|a^2\right|+1=0$ ce qui prouve que a est solution de l'équation (E).

$\bar{a}^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\bar{a}+1=\overline{a^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a+1}=0$ ce qui prouve que $\bar{a}$ est solution de l'équation (E).

3) a) $(z-1)\left(z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)\left(z^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right)=(z-1)\left(z^4+z^3+z^2+z+1\right)=z^5-1$.

b) En changeant z par a dans a), on obtient $a^5 - 1 = (a-1)\left(a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right)\left(a^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right)$

et puisque a est solution de l'équation (E) donc $\left(a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a + 1\right) = 0$, il en résulte que

$a^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^5 = 1$ ou encore a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1 sont $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, $k \in \{1,2,3,4\}$.

b) $\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{5} > 0 \\ \sin\frac{2\pi}{5} > 0 \end{cases}$, $\text{Im}(1) = 0$, $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$, $\cos\frac{6\pi}{5} < 0$ et $\sin\frac{8\pi}{5} < 0$. Il en résulte que $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives.

c) On sait que a est une racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et imaginaire sont strictement positives, d'après b), $a = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$.

5) Les affixes respectives des points I, A, B, C et D sont les racines cinquièmes de l'unité donc les points I, A, B, C et D sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C).

Exercice 3

1) a) Puisqu'il y a exactement 3 microscopes défectueux donc le premier microscope non défectueux est obtenu au plus au quatrième choix, on en déduit que $n \leq 4$.

b) $p_1 = \frac{7}{10}$ et $p_2 = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$.

c) $p_3 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{120}$ et $p_4 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{120}$.

2) a) Les valeurs prises par X sont $\{1,2,3,4\}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

b) $E(x) = \sum_1^4 x_i p_i = 1 \times \frac{7}{10} + 2 \times \frac{7}{30} + 3 \times \frac{7}{120} + 4 \times \frac{1}{120} = \frac{46}{120} = \frac{23}{60} = 0.38.$

3) a) $p(Y \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$.

b) $p(Y \geq 5) = 1 - p(Y \leq 5) = e^{-5\lambda} = 0.7 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0.7 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0.7}{5} = 0.071.$

c) $p(Y \geq 10 \setminus Y \geq 5) = \frac{p((Y \geq 10) \cap (Y \geq 5))}{p(Y \geq 5)} = \frac{p(Y \geq 10)}{p(Y \geq 5)} = e^{-5 \times 0.071} = 0.701.$

Exercice 4

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x \in]0,1[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$, il en résulte que $x < \frac{1}{x}$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$, il en résulte que $x > \frac{1}{x}$.

c) Si $x \in]0,1[$, $x < \frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $x > \frac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2-2x+2\right)e^x + e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-2x+2\right)e^x + e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x + e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-2+\frac{2}{x}\right)e^x + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote de (C_f).

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$. La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$ en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x) = (2x-2)e^x + \left(x^2-2x+2\right)e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = x^2e^x - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f'(1) = g(1) - g(1) = 0$.

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty \searrow$	$2e$	$\nearrow +\infty$	

4) a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) - h(x) = \left(x^2-2x+2\right)e^x > 0$ car $x^2-2x+2 > 0$, $(\Delta = -4)$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (C_h).

b) Voir figure.

5) a) $\int_1^x \left(f(t)-h(t)\right)dt = \int_1^x \left(t^2-2t+2\right)e^t dt = \int_1^x \left(t^2+2t\right)e^t dt + 2\int_1^x e^t dt - 4\int_1^x te^t dt$

$= \left[g(t)\right]_1^x + 2\left[e^t\right]_1^x - 4\int_1^x te^t dt = x^2e^x - e + 2e^x - 2e - 4\int_1^x te^t dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4\int_1^x te^t dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(x) = e^t \end{cases} \to \begin{cases} u(x) = 1 \\ v(x) = e^t \end{cases}$

$\int_1^x te^t dt = \left[te^t\right]_1^x - \int_1^x e^t dt = xe^x - e - \left[e^t\right]_1^x = xe^x - e^x$.

Donc $\int_1^x \left(f(t)-h(t)\right)dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4\left(xe^x - e^x\right) = \left(x^2-4x+6\right)e^x - 3e$.

b) $A_{\alpha} = \int_{\alpha}^{1} \left(f(t) - h(t) \right) dt = 3e - \left(\alpha^2 - 4\alpha + 6 \right) e^{\alpha}.$

$\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A_{\alpha} = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} 3e - \alpha^2 e^{\alpha} - 4\alpha e^{\alpha} + 6e^{\alpha} = 3e.$