RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ✻✻✻✻✻ EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**
	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3 h** — Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session principale**

(Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3)

Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.
   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.
2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.
   a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.
   b) Montrer que $P \cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.
   c) Déterminer $Q \cap S$.
3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.
   a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.
4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1) a) Construire, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B.
   b) Ecrire a et b sous forme algébrique.
2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.
   a) Déterminer l'affixe c du point C.
   b) Vérifier que $c^2=1+2i\sqrt{6}$.
3) On considère le point D d'affixe c^2.
   a) Montrer que $OD=5$.
   b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$.
On désigne par z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par z_2 l'autre solution.

5) Soit les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, z_1 et z_2.
   a) Justifier que le point M_1 est le milieu du segment $[IC]$.
   b) Montrer que le quadrilatère OCM_1M_2 est un parallélogramme.
   c) Construire les points M_1 et M_2.

Exercice 3 (6,5 points)

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.
   b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y=-x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Calculer f(1). En déduire le signe de $f(x)$ pour $x\in\,]0,+\infty[$.
   d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Soit $x>0$.
   a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.
   b) En remarquant que $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.
   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\le 1-\dfrac{1}{n+1}$.
   d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ et que $0,7<\ell\le 1$.

Exercice 4 (3,5 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

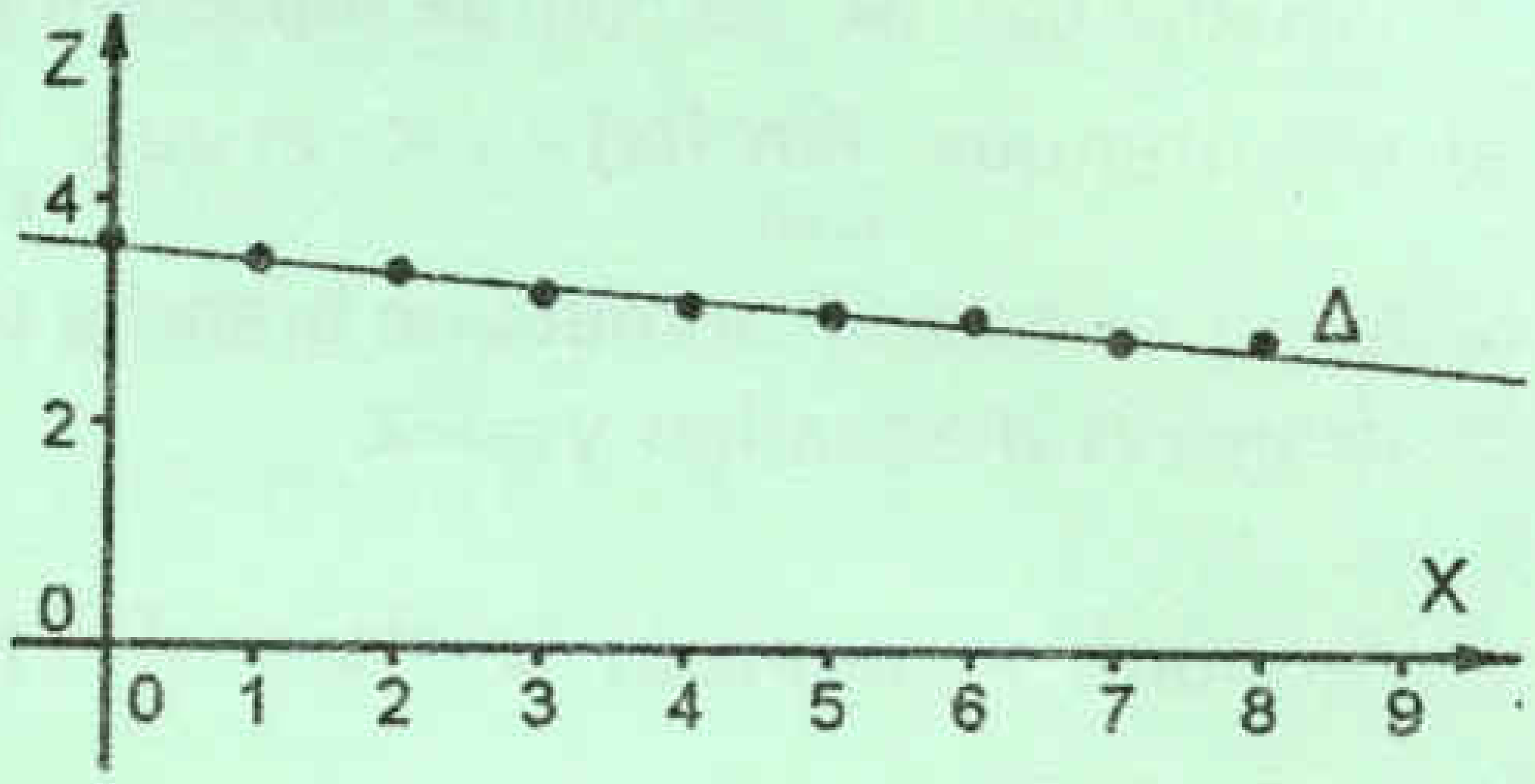
1) a) Déterminer, à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X. (les coefficients seront arrondis au centième).

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose $Z = \ln(Y)$.

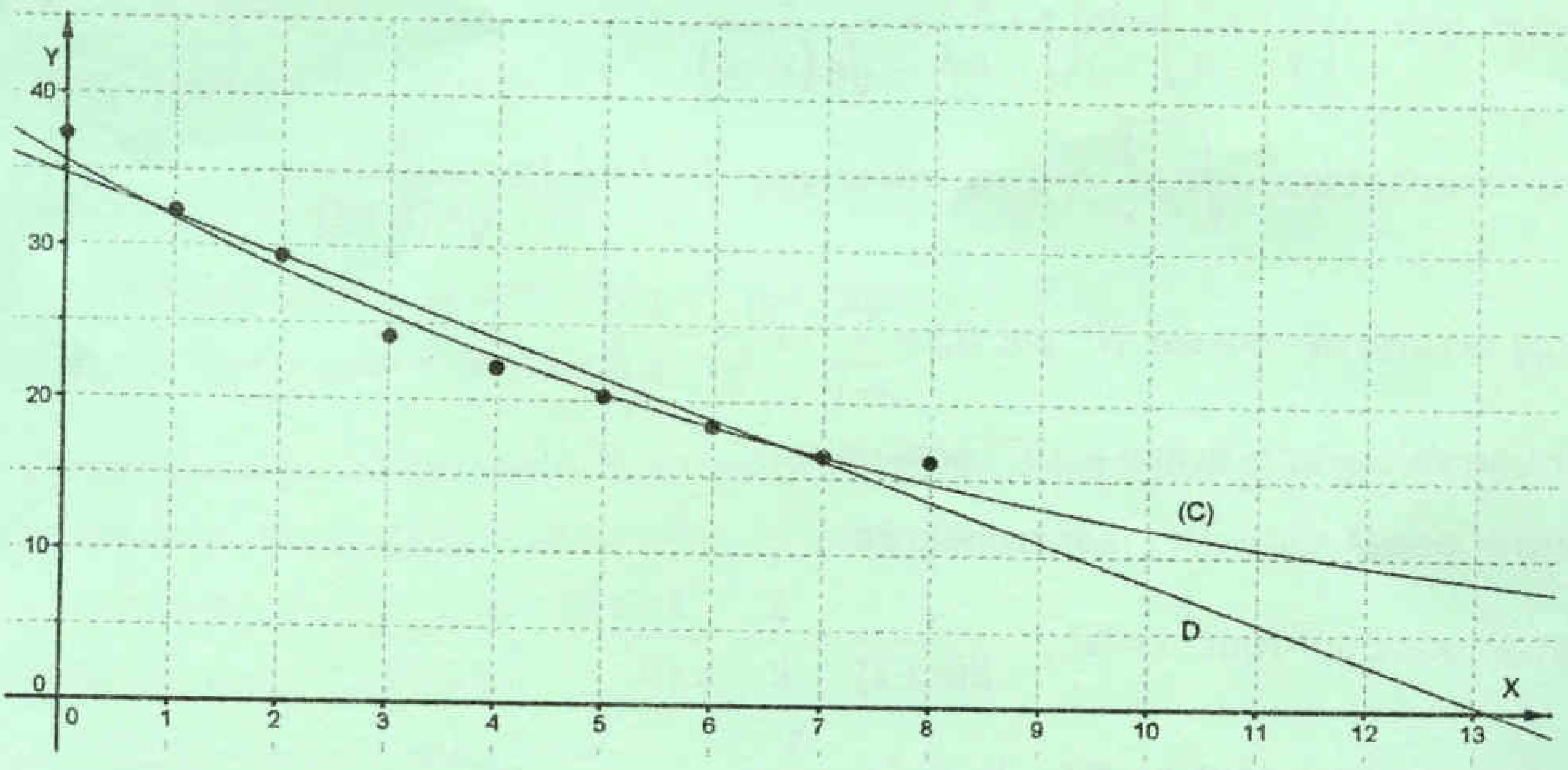
Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X, Z) et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z = -0,11x + 3,57$.



a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y = 35,52\,e^{-0,11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1) b) , la courbe (C) d'équation $y = 35,52\,e^{-0,11x}$ et le nuage de points de la série (X, Y).



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ? Justifier la réponse.