

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

\*\*\*\*\*

EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Épreuve : **MATHÉMATIQUES**

Section : **Sciences techniques**

Durée : **3 h**

Coefficient : **3**

**SESSION 2016**

**Session principale**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

**Exercice 1 ( 5 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(-2, 1, -1)$  et  $C(0, 0, 1)$ .

1) a - Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .

b - Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est

$$x - z + 1 = 0.$$

2) On considère les points  $I(1, -1, -1)$  et  $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$  et soit  $\Delta$  la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a- Montrer que la droite  $\Delta$  coupe le plan P en J.

b- Calculer la distance IJ.

3) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$ .

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b- Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4) Pour  $\theta \in [0, 2\pi[$ , on considère le point  $N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3)$ .

a- Vérifier que N est un point de la sphère S.

b- Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c- Montrer que  $(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AN} = -5 - \cos\theta$ .

d- En déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle le volume du tétraèdre ABCN est minimal.

## Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :

$$(E): z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0.$$

1) a- Vérifier que  $(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$ .

b- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

a- Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

On désigne par B et C les points du plan d'affixes respectives  $b = -1 + i\sqrt{3}$  et  $c = \bar{b}$ .

b- Mettre chacun des nombres complexes b et c sous la forme exponentielle.

c- En déduire que les points B et C appartiennent au cercle (C).

d- Construire alors les points B et C.

3) a- Montrer que  $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b- En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

## Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)e^{1-x}$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b - Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c - Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $(+\infty)$ .

2) a - Montrer que pour tout réel x, on a :  $f'(x) = -x e^{1-x}$ .

b - Dresser le tableau de variation de f.

3) a - Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b - Soit T la tangente à la courbe (C) au point I.

Montrer que T a pour équation cartésienne  $y = -x + 3$ .

4) Construire la courbe (C) ainsi que sa tangente T. (on prendra  $e \approx 2,7$ )

5) Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à  $(-1)$ .

On pose  $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$ .

a - Donner une interprétation graphique de l'intégrale  $I(\alpha)$ .

b - Vérifier que pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = f''(x) + 2e^{1-x}$ .

c - En déduire que  $I(\alpha) = e^2 - (2 + \alpha)e^{1-\alpha}$ .

d - Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

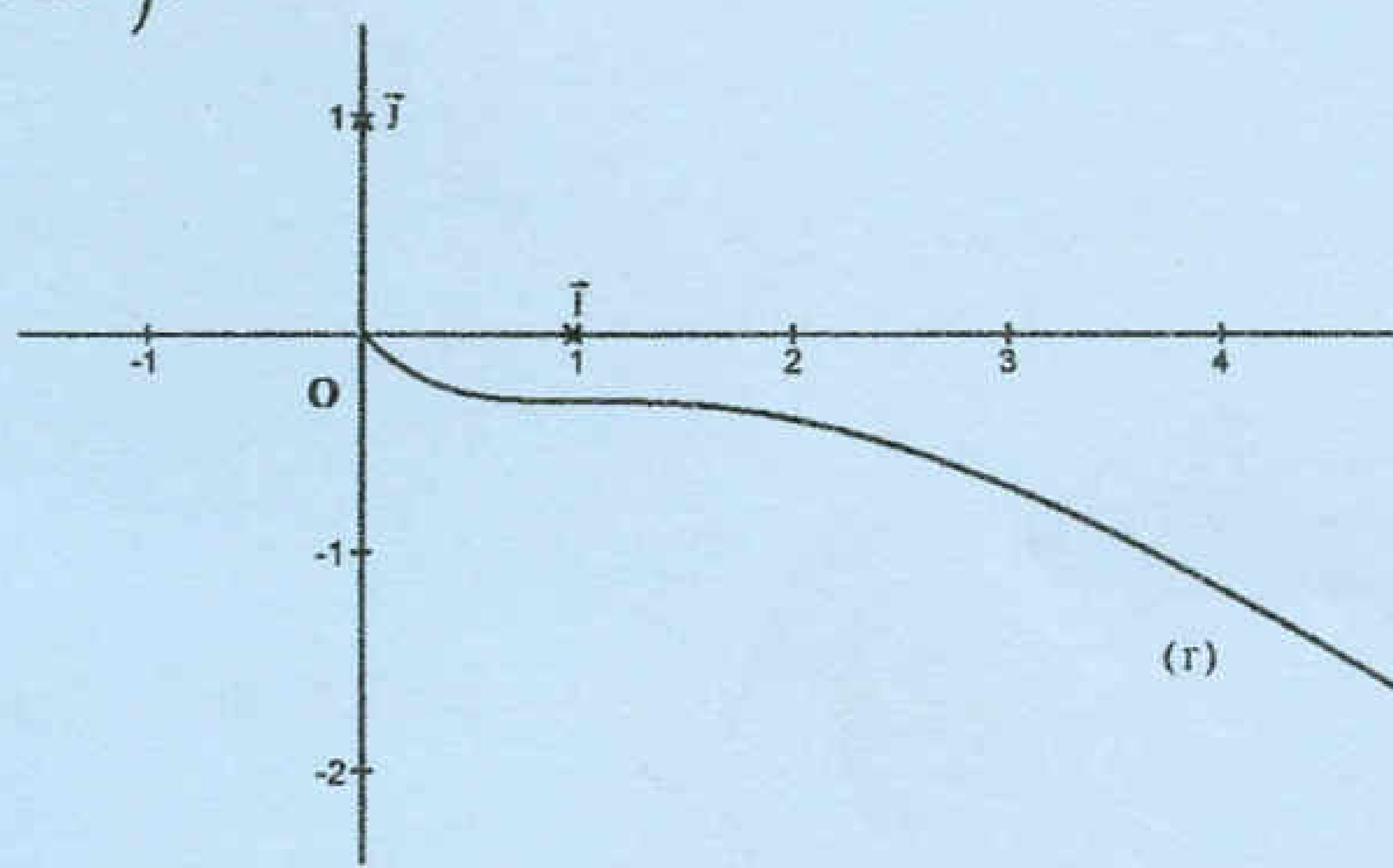
### Exercice 4 (5 points)

1) La courbe  $(\Gamma)$  ci-contre, est la représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$ .

$(\Gamma)$  coupe l'axe des abscisses uniquement en  $O$ .

Par une lecture graphique, justifier que :

pour tout réel  $x \in [0, +\infty[$  on a :  $\ln(1+x^2) \leq x$ .



2) On considère la suite  $(U_n)$  définie par 
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + U_n^2), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U_n > 0$ .

b- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ .

c- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

d- Déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.

3) Soit  $(S_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .

a- Montrer que la suite  $(S_n)$  est strictement croissante.

b- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

c- Déduire que la suite  $(S_n)$  est convergente.