

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4,5 points)

Une chaîne de production d'une usine fabrique des carreaux de céramique pour le carrelage de sols.

Une étude statistique a montré que :

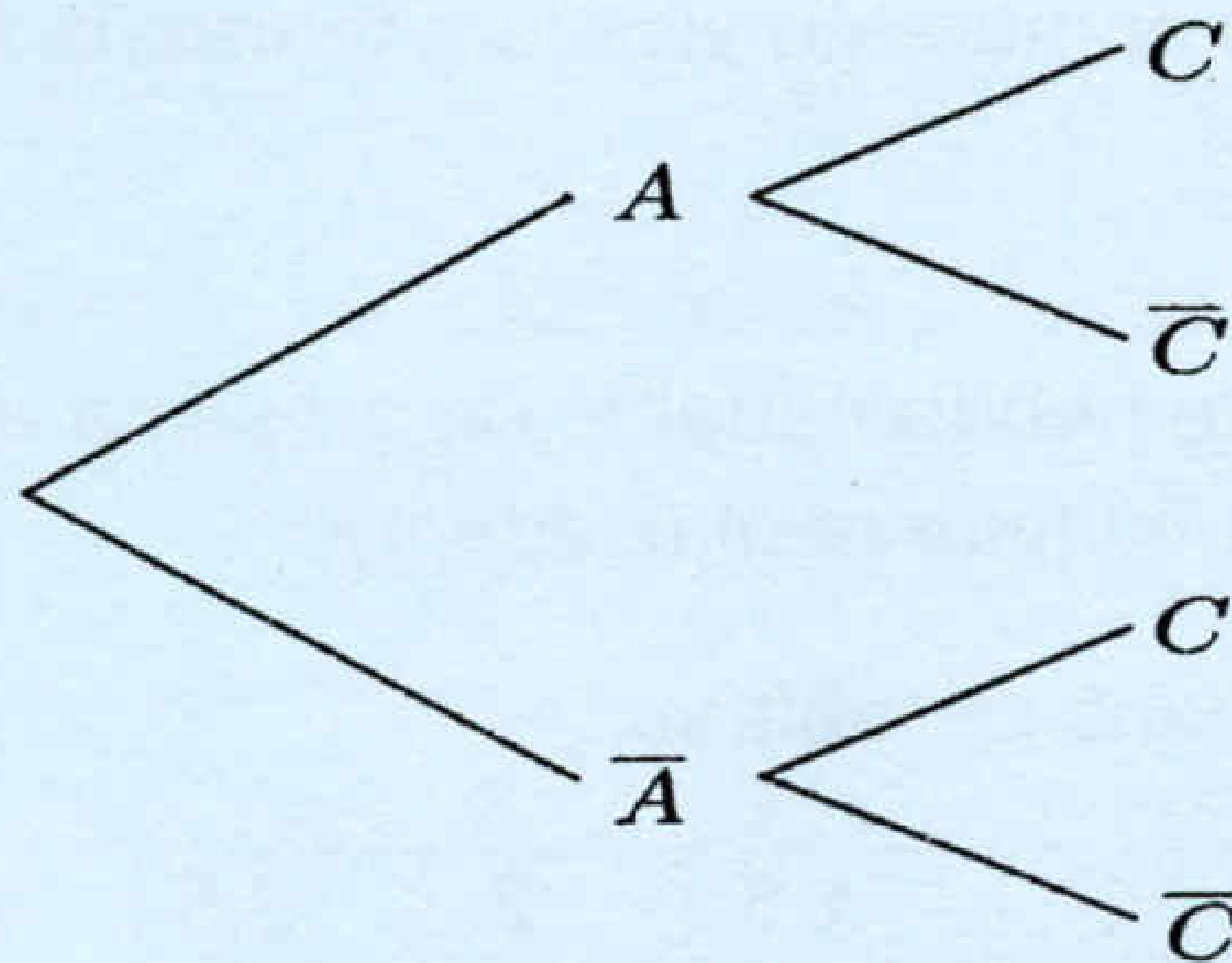
- 15 % des carreaux de céramique fabriqués ont un défaut d'aspect.
- Parmi les carreaux de céramique ayant un défaut d'aspect 20% ont un défaut de calibrage.
- Parmi les carreaux de céramique n'ayant pas un défaut d'aspect 8% présentent un défaut de calibrage.

On appelle A l'événement « le carreau de céramique fabriqué présente un défaut d'aspect ».

On appelle C l'événement « le carreau de céramique fabriqué présente un défaut de calibrage ».

Le directeur de la qualité choisit au hasard un carreau de céramique dans un lot de carreaux produits.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) a) Quelle est la probabilité pour que le carreau de céramique choisi ait un défaut d'aspect et un défaut de calibrage ?

b) Calculer $p(C)$.

c) Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier.

3) Le directeur de l'usine affirme que 78% du produit fabriqué ne présente aucun défaut.

Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.

Exercice 2 (5 points)

On donne les matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer le déterminant de A . En déduire que A est inversible.

b) Calculer $A \times B$.

c) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A .

2) Les tarifs d'entrée au musée du Bardo sont :

- 12 dinars pour les visiteurs étrangers.
- 8 dinars pour les tunisiens de moins de 60 ans.
- 4 dinars pour les tunisiens âgés de plus de 60 ans.

Les renseignements suivants concernent la visite du musée pendant une journée:

- Le nombre total de visiteurs est de 300 personnes.
- Le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans est égal au total du nombre de visiteurs étrangers augmenté du triple du nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans.
- La recette de la journée est de 2040 dinars.

a) Montrer que la situation se traduit par le système (S):
$$\begin{cases} x + y + z = 300 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 510. \end{cases}$$

b) Donner l'écriture matricielle de (S).

c) Déterminer alors Le nombre de visiteurs étrangers, le nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans et le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans.

Exercice 3 (4,5 points)

Afin de maximiser la recette hebdomadaire, un artisan a effectué une étude statistique pour établir le prix de vente unitaire le plus adapté.

Les résultats sont donnés dans ce tableau:

Prix de vente unitaire x_i (en dinars)	1	1,5	2	2,5	3,5	4	4,5	5
Nombre d'objets vendus y_i	123	110	90	80	68	50	39	21

- 1) a) Représenter le nuage de points de la série statistique double (x_i, y_i) dans un repère orthogonal du plan.
- b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine? Justifier votre réponse.
- 2) Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à l'unité).
- 3) On suppose que cet ajustement reste bien valable.
 - a) Montrer que la recette hebdomadaire en dinars est donnée par la fonction g définie par $g(x) = -24x^2 + 144x$, où x est le prix unitaire de vente en dinars.
 - b) Déterminer alors le prix unitaire de vente qui permet de réaliser une recette maximale.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = (4 - x)e^x - 5$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = (3 - x)e^x$.
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution α et vérifier que $3,89 < \alpha < 3,90$.
- b) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1, +\infty[$.
- 4) Soit F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = (5 - x)e^x - 5x$ et $I = \int_1^4 f(x)dx$.
Vérifier que F est une primitive de f sur $[1, +\infty[$. En déduire la valeur de I.
- 5) Une entreprise produit chaque jour x centaines d'objets ($1 \leq x \leq 5$).
Le bénéfice réalisé en milliers de dinars est égal à $f(x)$.
 - a) Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire par jour pour réaliser un bénéfice maximal? Préciser alors ce bénéfice à un dinar près.
 - b) Quel est le nombre maximal d'objets produits par jour pour ne pas perdre?
 - c) L'entreprise envisage une production journalière entre 100 et 400 objets. Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice (on donnera le résultat à un dinar près).