

Exercice 1 (4 points)

1) On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$

a) Vérifier que $(1+2i)^2 = -3+4i$

b) Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation (E).

2) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -i$, $z_B = 3$, $z_C = 2+3i$ et $z_D = -1+2i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

b) Calculer $|z_C - z_A|$ et $|z_D - z_B|$

c) Calculer $(z_C - z_A)\overline{(z_D - z_B)}$

d) Dédire que ABCD est un carré et calculer son aire.

Exercice 2 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

a) Étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$

b) En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$. Interpréter graphiquement ce résultat

c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

d) Dresser le tableau de variations de f

e) Préciser la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à son asymptote et tracer \mathcal{C}

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , les droites d'équation $x=1$; $x=2$ et $y=x-1$.

Exercice 3 (6 points)

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

- 1) a) Montrer que la matrice A est inversible
b) Calculer $A \times B$ et en déduire A^{-1} la matrice inverse de A

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

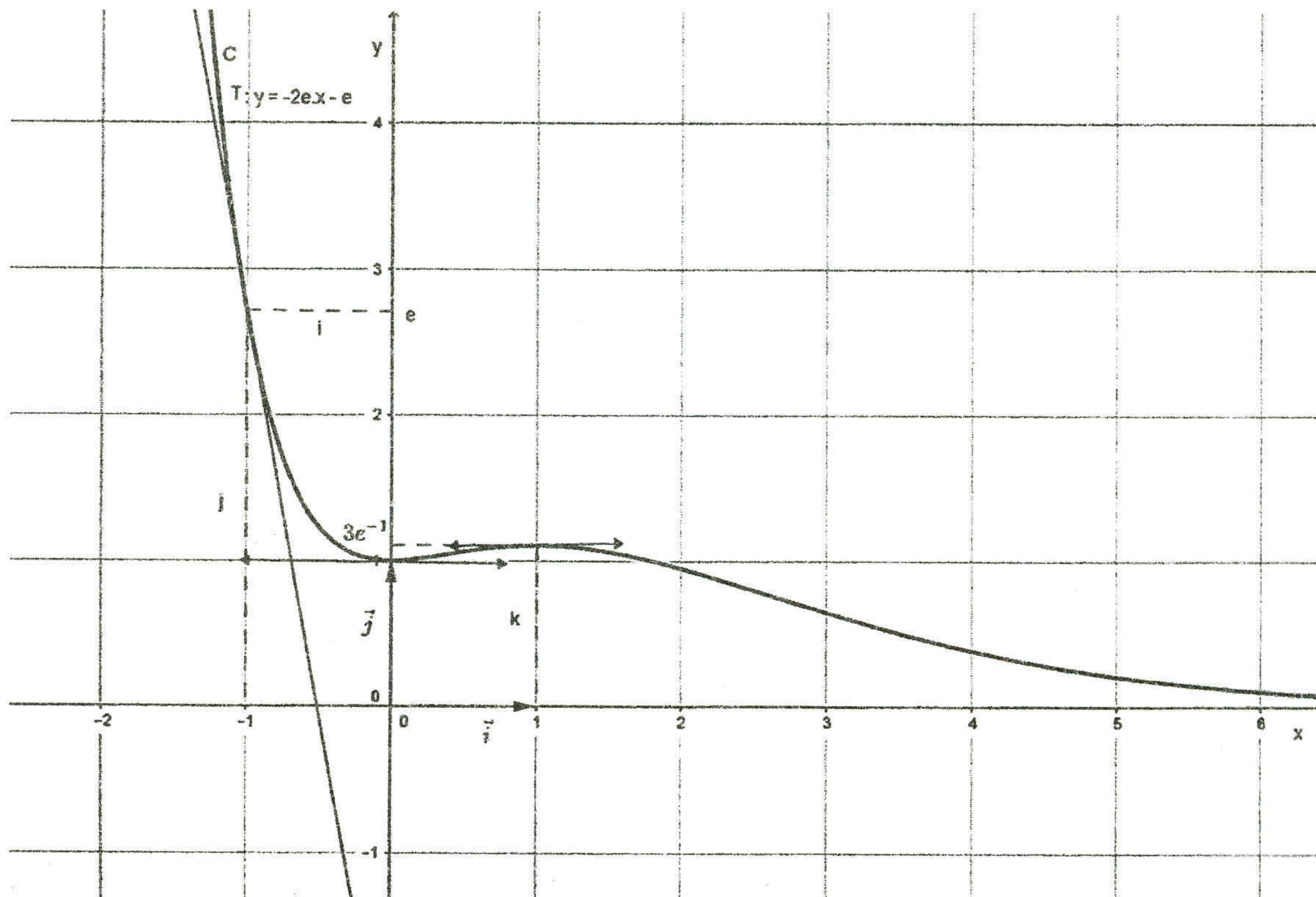
La courbe C représentée ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , elle admet :

- Une branche parabolique de direction $(O ; \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$
- Une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$
- Deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1
- La tangente T au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -2ex - e$

A l'aide du graphique et des renseignements fournis donner :

a) $f(1)$; $f(-1)$ et $f'(-1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$



3) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b, c sont des réels

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))e^{-x}$

b) Montrer que les réels a, b et c vérifient le système

$$(S) : \begin{cases} a + b + c & = 3 \\ a - b + c & = 1 \\ -3a + 2b - c & = -2 \end{cases}$$

c) Ecrire le système (S) sous forme matricielle et en déduire l'expression de $f(x)$

4) Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 (6 points)

1) a) Compléter le tableau suivant :

r	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de 2^r par 5					
Le reste de la division euclidienne de 3^r par 5					
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5					

b) En déduire que pour tout entier naturel q , $2^{4q} \equiv 1[5]$ et $3^{4q} \equiv 1[5]$

2) Pour tout entier naturel $k \geq 1$, notons r le reste de la division euclidienne de k par 4.

a) Quelles sont les valeurs possibles de r ?

b) Donner, selon la valeur de r , le reste de la division euclidienne de $2^k + 3^k$ par 5

3) a) Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $2^k + 3^k$ est impair

b) Donner suivant les valeurs de k , le chiffre des unités de $2^k + 3^k$

4) Quel est le chiffre des unités de $2^{2017} + 3^{2017}$?