

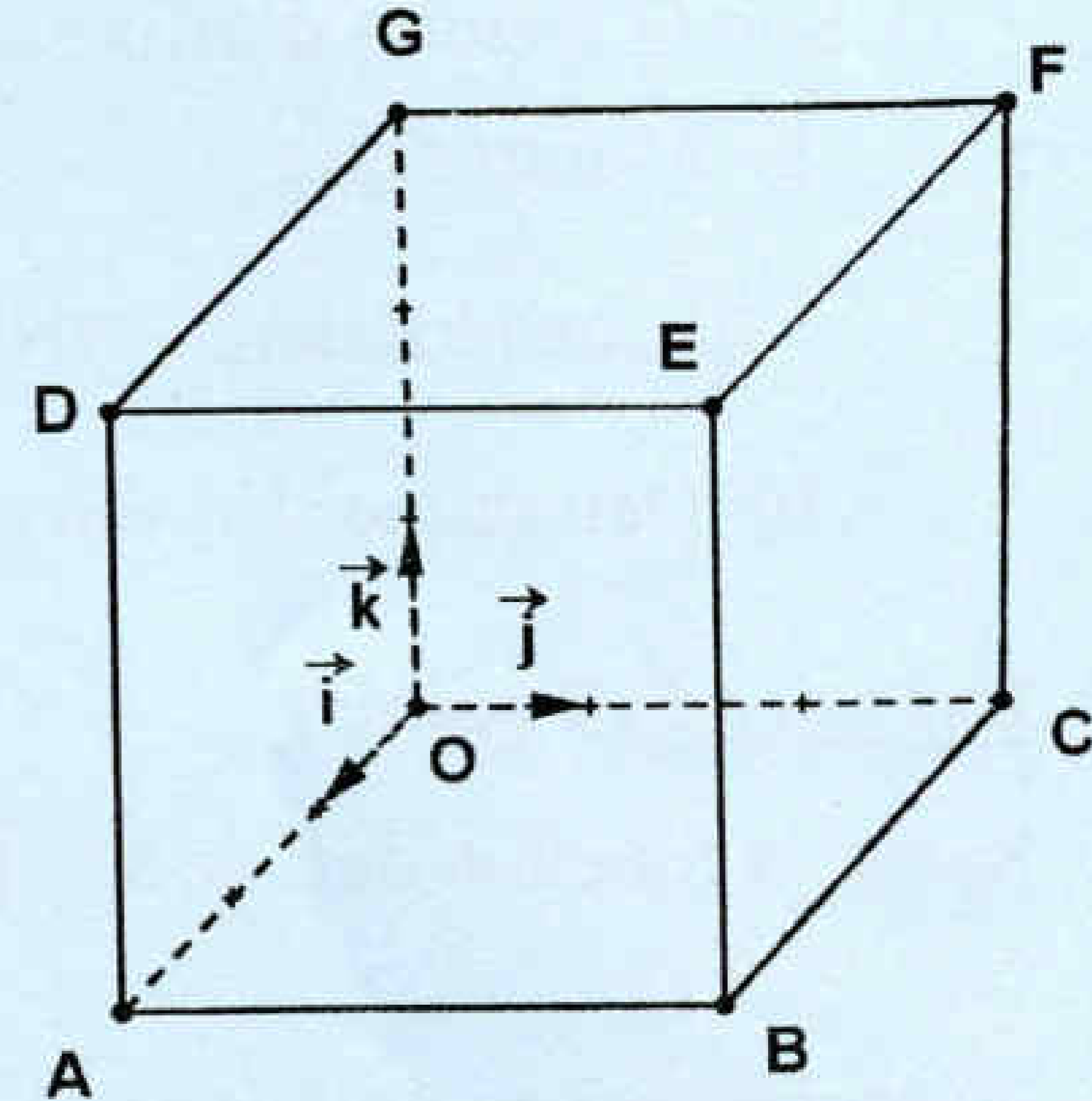


Le sujet comporte 4 pages .La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que $A(3,0,0)$; $C(0,3,0)$ et $G(0,0,3)$.



1) a) Justifier que E a pour coordonnées $(3,3,3)$ et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω milieu de $[CD]$.

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AE} \wedge \overline{AG}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG.

3) On désigne par P le plan passant par les points A, E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x - y + z - 3 = 0$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace

$$\text{tels que } x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2 (5 points)

A/1) a) Justifier que $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

b) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $2\sqrt{2}i$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans la figure de l'annexe ci-jointe :

- (C) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

- A et D sont les points d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{2}i$ et $z_D = 2\sqrt{2}i$.

a) Construire dans l'annexe les points B et C d'affixes respectives

$$z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) Vérifier que $z_B = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $z_C = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Montrer que $(BC) \perp (AD)$.

d) Montrer que le quadrilatère ABDC est un losange.

B/ Soit α un nombre complexe non nul. On désigne par M, N et P les points d'affixes

respectives $z_M = \alpha$, $z_N = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_P = \alpha e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$.

1) a) Calculer z_N^3 et z_P^3 .

b) En déduire la nature du triangle MNP.

2) Soit Q le point d'affixe $z_Q = \alpha^3$.

a) Montrer que

(le quadrilatère MNQP est un losange) équivaut à ($\alpha^3 = -2\alpha$).

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles MNQP est un losange.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dans

un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x(\ln(x+1) - \ln x) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $] -\infty, 1[$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $a_n = f^{-1}(\frac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n = x + 1$.

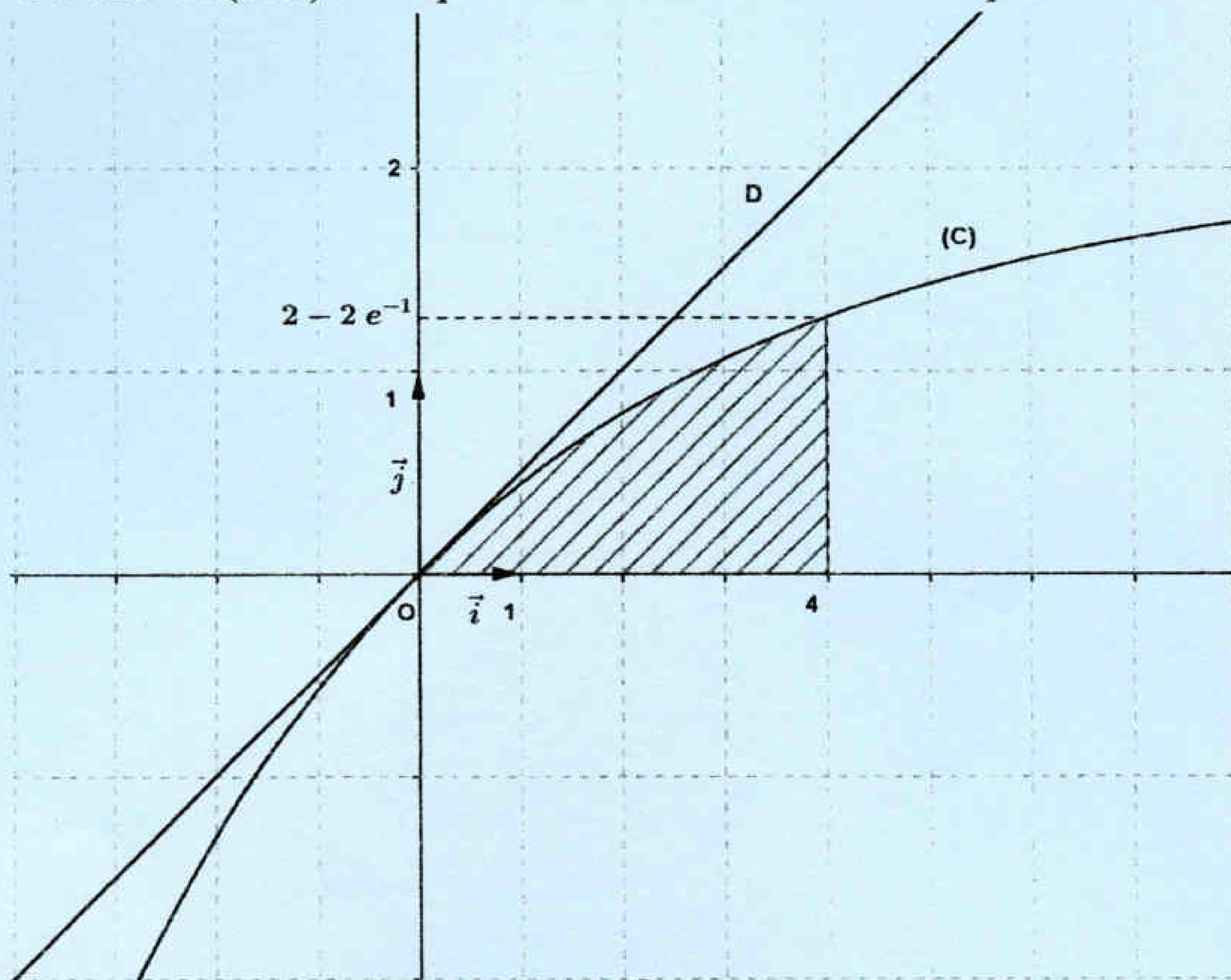
c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n$.

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-dessous :

- la courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- la droite D est la tangente à (C) au point O.
- $f(4) = 2 - 2e^{-1}$.

On désigne par S l'aire en (u.a) de la partie hachurée et on admet que $S = 8e^{-1}$.



- 1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
b) En déduire que $b = \frac{1}{2}$.
- 2) a) Justifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{a} \left(f'(x) - \frac{1}{2} \right)$
b) En déduire que $S = \frac{-2e^{-1}}{a}$.
c) Montrer alors que $a = -0,25$.
- 3) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 2 - 2e^{-0.25x}$.
- 4) On admet que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ modélise l'évolution de la hauteur d'une certaine espèce de maïs. Autrement dit : si on note $h(t)$ la hauteur en mètres de cette espèce de maïs à l'instant t (exprimé en semaines) alors $h(t) = 2 - 2e^{-0.25t}$.
 - a) Déterminer la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines.
 - b) Au cours de quelle semaine la hauteur d'une plante de maïs dépassera-t-elle 198 cm ?

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....

✂

Épreuve : Mathématiques Section : Sciences expérimentales
Annexe à rendre avec la copie

