

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session de contrôle 2018

Section : Economie et gestion

Exercice 1 (4 points)

1- a- Soit la propriété suivante : $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$.

- Pour $n=0$ on a : $1 \leq u_0 = 1 < 3$ donc P_0 est vraie
- Supposons P_n est vraie jusqu'à l'ordre n ($1 \leq u_n < 3$) et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre $n+1$ ($1 \leq u_{n+1} < 3$)

$$\bullet u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n}{1+u_n} - 1 = \frac{4u_n}{1+u_n} - \frac{1+u_n}{1+u_n} = \frac{4u_n - 1 - u_n}{1+u_n} = \frac{3u_n - 1}{1+u_n}$$

on a $1 \leq u_n < 3 \Leftrightarrow 3 \leq 3u_n < 9$ donc $3u_n \geq 1$ d'où $3u_n - 1 \geq 0$

et on a aussi $1+u_n > 0$. Ainsi $u_{n+1} - 1 \geq 0$ d'où $1 \leq u_{n+1}$

$$\bullet u_{n+1} - 3 = \frac{4u_n}{1+u_n} - \frac{3(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{1+u_n} = \frac{u_n - 3}{1+u_n} \in \mathbb{R}_- . \text{ Alors } 1 \leq u_{n+1} < 3 .$$

En fin d'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

b-

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - \frac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{4u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{3u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$$

c- $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n} > 0$ d'où la suite (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} 2-a) v_{n+1} &= \frac{3-u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{3 - \frac{4u_n}{1+u_n}}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{3 + 3u_n - 4u_n}{\frac{4u_n}{1+u_n}} = \frac{3-u_n}{\frac{4u_n}{1+u_n}} \\ &= \frac{3-u_n}{1+u_n} \times \frac{1+u_n}{4u_n} = \frac{3-u_n}{4u_n} = \frac{1}{4} \frac{3-u_n}{u_n} = \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

b- $v_n = \frac{3-u_n}{u_n} \Leftrightarrow u_n \cdot v_n = 3 - u_n \Leftrightarrow u_n \cdot v_n + u_n = 3 \Leftrightarrow u_n (v_n + 1) = 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{1+v_n}$

c- (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

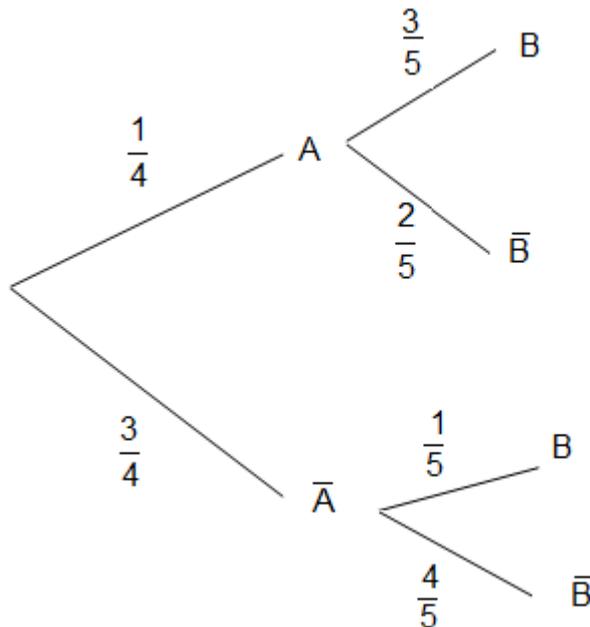
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

Exercice 2 (5 points)

1) a) A « Obtenir Pile » donc \bar{A} « Obtenir Face »

$$P(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

b)



2) a) $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p(A) p(B / A) + p(\bar{A}) p(B / \bar{A})$

Donc $p(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

b) $p(B / A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$

3) a) X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(B) = \frac{3}{10}$.

$$P(X=4) = C_5^4 \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \frac{2835}{10^5} = 0,02835.$$

b) $E(X) = n \cdot p = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2}$.

$$V(X) = n \cdot p \cdot \bar{p} = \frac{21}{2}.$$

Exercice 3 (5 points)

1) a)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 9,9 & 7,5 & 3,75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9,9 \begin{vmatrix} 780 & 385 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1030 \begin{vmatrix} 7,5 & 3,75 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7,5 & 3,75 \\ 780 & 385 \end{vmatrix} \\ &= 9,9 \times 395 - 1030 \times 3,75 + 2887,5 - 2925 = 10,5\end{aligned}$$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible.

$$\text{b) } A \times B = \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{pmatrix} = 210 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 210 I_3.$$

$$A \times B = 210 I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{210} A \times B = I_3 \text{ d'où } A^{-1} = \frac{1}{210} B.$$

2) a) On pose :

x = le nombre des bagues de types B_1

y = le nombre des bagues de types B_2

z = le nombre des bagues de types B_3 .

Chaque bague pèse 5 grammes, le poids total d'or est :

$$\frac{9}{100} \cdot 5x + \frac{75}{100} \cdot 5y + \frac{37,5}{100} \cdot 5z = 312 \Leftrightarrow 5(0,99x + 7,5y + 0,375z) = 312$$

$$\Leftrightarrow 9,9x + 7,5y + 0,375z = 624$$

Le bijoutier fabrique 100 bagues donc $x + y + z = 100$

Ainsi la situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 9,9x + 7,5y + 3,75z = 624 \\ 1030x + 780y + 385z = 64700 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{b) (S)} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9,9 & 7,5 & 3,75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$c) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} B \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} 7900 & -73 & -750 \\ -12900 & 123 & 1020 \\ 5000 & -48 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Donc $x=10$, $y=50$ et $z=40$.

Exercice 4 (6 points)

A) 1) Le point $A(1, e-1) \in C_f$ donc $f(1) = e-1$.

Au point A la tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$.

b) la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1.$$

c) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points donc

l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions.

d) tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

2) a) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a : $F'(x) = -e^{2-x}(x+1)e^{2-x} - 1 = x e^{2-x} - 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

b) $A = \int_{\frac{1}{2}}^3 |f(x)| dx$, or C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Donc $A = \int_{\frac{1}{2}}^3 |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^3 f(x) dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^3 = F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc $A = \left(- (3+1) e^{2-1} - 3\right) - \left(-\left(\frac{1}{2} + 1\right)e^{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{e} - \frac{5}{2}$.

B) 1) $f(2) = 2 e^{2-2} - 1 = 1$ donc pour 200 litres le bénéfice est 1000 dinars.

2) Le bénéfice est maximal si f atteint son maximum qui se réalise pour $x = 1$.

Donc pour obtenir le bénéfice maximal la quantité du produit est :

$1 \times 1000 = 1000$ litres. Le bénéfice maximal est donc :

$f(1) \times 1000 = (1 \cdot e^{2-1} - 1) \cdot 1000 = 1000e - 1000 \approx 1718,28$ dinars.

3) le bénéfice moyen est $\bar{f} = \frac{1}{3-0,5} \int_{\frac{1}{2}}^3 f(x) dx = \frac{1}{2,5} A = \frac{3}{5} e^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5e} - 1$.

Ainsi $\bar{f} \approx 1100$ dinars.