REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences de l'informatique***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 4 pages, la page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2-(1+i)z+i=0$$

2) a) Montrer que pour tout z non nul, $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z+\frac{1}{z}=1$ et $z+\frac{1}{z}=i$

3) On considère le polynôme $P(z)=z^4-(1+i)z^3+(2+i)z^2-(1+i)z+1$

a) Vérifier, que pour tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i$$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, en posant $Z=z+\frac{1}{z}$, l'équation $P(z)=0$

Exercice 2 (4 points)

On considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$ et $B=I_3+A$ où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

1) Montrer que $A^2=3A$.

2) a) En développant, calculer les produits $(4I_3-A)\times B$ et $B\times(4I_3-A)$.

b) En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

3) on considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=-1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$ où x, y et z sont des nombres réels

a) Écrire (S) sous la forme matricielle.

b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 3 (6 points)

On considère les deux suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 3x_n - 2$$

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 3y_n + 8$$

1) On définit la suite (u_n), par $u_n = x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n = 4\times 3^n + 1$.

2) a) Montrer que $PGCD(x_n, x_{n+1})$ divise 2.

   b) En déduire que $PGCD(x_n, x_{n+1}) = 1$.

3) a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $5x_n - 4y_n = 21$.

   b) En déduire l'expression de y_n en fonction de n.

   c) Déterminer les valeurs possibles du $PGCD(x_n, y_n)$.

4) a) Donner, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

   b) Montrer que si $n \equiv 5[6]$ alors $PGCD(x_n, y_n) = 7$.

   c) Déterminer $PGCD(x_{2018}, y_{2018})$.

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{\frac{-x}{n}}$

et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) dresser le tableau des variations de f_n.

b) Vérifier que toutes les courbes C_n passent par le point $J(0\ ,\ 1)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la position relative de C_n et C_{n+1} sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

2) Dans la figure en annexe, on a construit les courbes C_1 et C_3 ainsi que la droite $\Delta :\ y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Recopier puis compléter les phrases suivantes :

- « la courbe tracée en trait interrompu est celle de .... »
- « la courbe tracée en trait continue est celle de .... »

b) Tracer alors dans le même repère la courbe C_2 de la fonction f_2.

3) On considère la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - x$

a) Étudier les variations de g_n.

b) Montrer qu'il existe un seul réel $x_n \in]0\ ,\ 1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

c) Vérifier que x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n de f_n et la droite Δ.

d) Placer x_1, x_2 et x_3 sur l'axe des abscisses.

4) a) Montrer que $g_{n+1}(x_n) = e^{\frac{-x_n}{n+1}} - e^{\frac{-x_n}{n}}$

b) En déduire que $g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$, puis conclure que (x_n) est croissante.

c) Déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ......

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Sciences de l'informatique** -Session principale - **2018**

Annexe à rendre avec la copie