

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	<b>Session de contrôle</b>	
	<i>Epreuve :</i> <b>Mathématiques</b>	<i>Section :</i> <b>Sciences expérimentales</b>
	Durée : <b>3h</b>	

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1,1,1)$ ,  $B(0,4,0)$ ,  $C(0,0,2)$  et  $I(-1,1,-1)$ .

1/ a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .

b) Calculer le volume  $V$  du tétraèdre ABCI.

2/ On désigne par  $P$  le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne de  $P$  est  $x+y+2z-4=0$ .

3/ Soit  $(S)$  l'ensemble des points  $M(x,y,z)$  de l'espace tel que

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0.$$

a) Montrer que  $(S)$  est la sphère de centre  $I$  est de rayon  $\sqrt{11}$ .

b) Montrer que  $P \cap (S)$  est un cercle  $(\mathcal{C})$  de rayon  $\sqrt{5}$ .

c) Vérifier que le segment  $[BC]$  est un diamètre du cercle  $(\mathcal{C})$ .

En déduire les coordonnées du point  $H$ , centre de  $(\mathcal{C})$ .

4/ Soit  $a$  un réel et  $M$  le point défini par  $\overline{AM} = a \overline{AB}$ .

a) Déterminer à l'aide du réel  $a$ , les coordonnées du point  $M$ .

b) Montrer que  $\overline{BM} \cdot \overline{CM} = (a-1)(11a+3)$ .

c) En déduire que la droite  $(AB)$  recoupe le cercle  $(\mathcal{C})$  au point  $E$  défini par  $\overline{AE} = \frac{-3}{11} \overline{AB}$ .

d) Montrer que le volume  $V'$  du tétraèdre AECI est égal à  $\frac{3}{11} V$ .

### Exercice 2 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe,  $(C)$  et  $(C')$  sont deux cercles de même centre  $O$  et de rayons respectifs  $\sqrt{3}$  et  $3$ .

1) On considère le point  $P$  d'affixe  $p = \sqrt{2} + i$ .

a) Vérifier que le point  $P$  appartient à  $(C)$ .

b) Construire le point  $P$ .

c) On désigne par  $\alpha$  un argument du nombre  $p$ . Donner l'écriture exponentielle de  $p$ .

2/ Soit  $Q$  le point du cercle  $(C')$  tel que  $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \alpha [2\pi]$ . On note  $q$  l'affixe du point  $Q$ .

- Donner une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OQ})$ .
- Ecrire le nombre complexe  $q$  sous forme exponentielle.
- En déduire que  $p^2 = q$  puis que  $q = 1 + 2\sqrt{2}i$ .

II) On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, les équations

$$(E): 16z^2 - 8z + 9 = 0 \quad \text{et} \quad (E'): 16z^4 - 8z^2 + 9 = 0.$$

1/ a) Montrer que les solutions de l'équation  $(E)$  sont les nombres  $\frac{q}{4}$  et  $\frac{\bar{q}}{4}$ .

b) En déduire les solutions de l'équation  $(E')$ .

2/ a) Construire dans l'annexe les points images des solutions de l'équation  $(E')$ .

b) Montrer que ces points sont les sommets d'un rectangle.

### Exercice 3 (6.5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)^2 - xe^x$ . On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1/ a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ . Interpréter graphiquement.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ . Interpréter graphiquement.

2/ a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+1)(2 - e^x)$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $(\Gamma)$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 1$ .

a) Montrer que la droite  $\Delta$  est une tangente commune à  $(C_f)$  et  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 0.

b) Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - (x+1) \geq 0$ .

4/ a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - f(x) = (x+1)(e^x - x - 1)$ .

b) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $(x+1) - f(x) = x(e^x - x - 1)$ .

c) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Gamma)$ , puis de  $(C_f)$  et  $\Delta$ .

5/ Tracer dans l'annexe, la courbe  $(C_f)$ .

6/ On désigne par  $A$  l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par les courbes  $(C_f)$  et  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ .

Montrer que  $A = \frac{1}{e} - \frac{1}{3}$ .

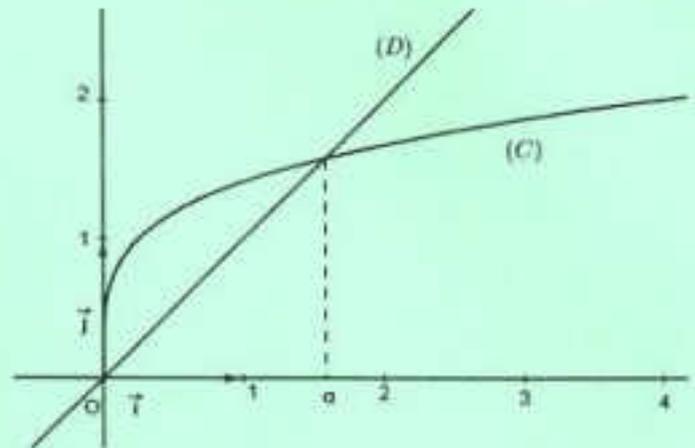
### Exercice 4 (4 points)

Dans la figure ci-contre,  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan.

(C) est la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = \sqrt[4]{4x},$$

la droite (D) d'équation  $y = x$  coupe la courbe (C) au point O et en un autre point d'abscisse  $\alpha$ .



1/ Vérifier que  $\alpha = \sqrt[3]{4}$ .

2/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ , par  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on désigne par  $(u_n)$  la suite

$$\text{définie par } \begin{cases} u_0 = 4, \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- Classer dans l'ordre croissant les réels  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que, si  $u_{n+1} \leq u_n$  alors  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.

3/ Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g(x) = f(f(x))$ .

4/ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = u_{2n+1}$  et  $w_n = u_{2n}$ .

- Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = g(v_n)$  et  $w_{n+1} = g(w_n)$ .
- En utilisant la monotonie de la fonction  $g$ , montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $v_n \leq v_{n+1} \leq \alpha \leq w_n \leq w_{n+1}$ .
- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et Prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants  
.....  
.....

X

Épreuve : **Mathématiques** -Section : **Sciences expérimentales** -Session de contrôle - 2018  
**Annexe à rendre avec la copie**

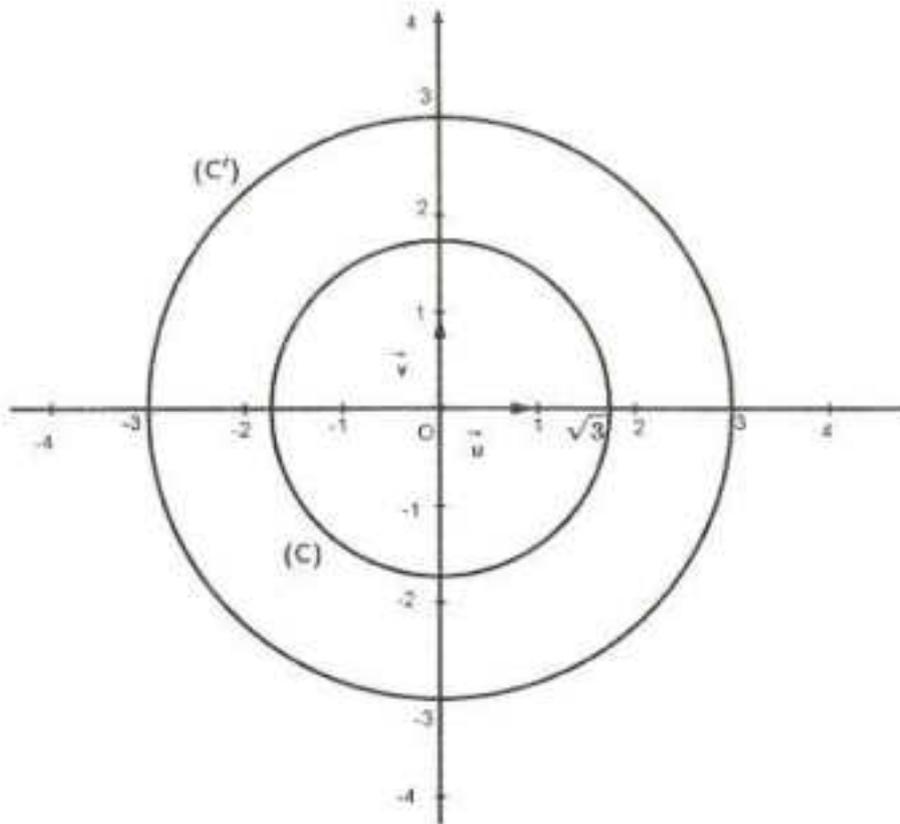


Figure 1

Ne rien écrire ici

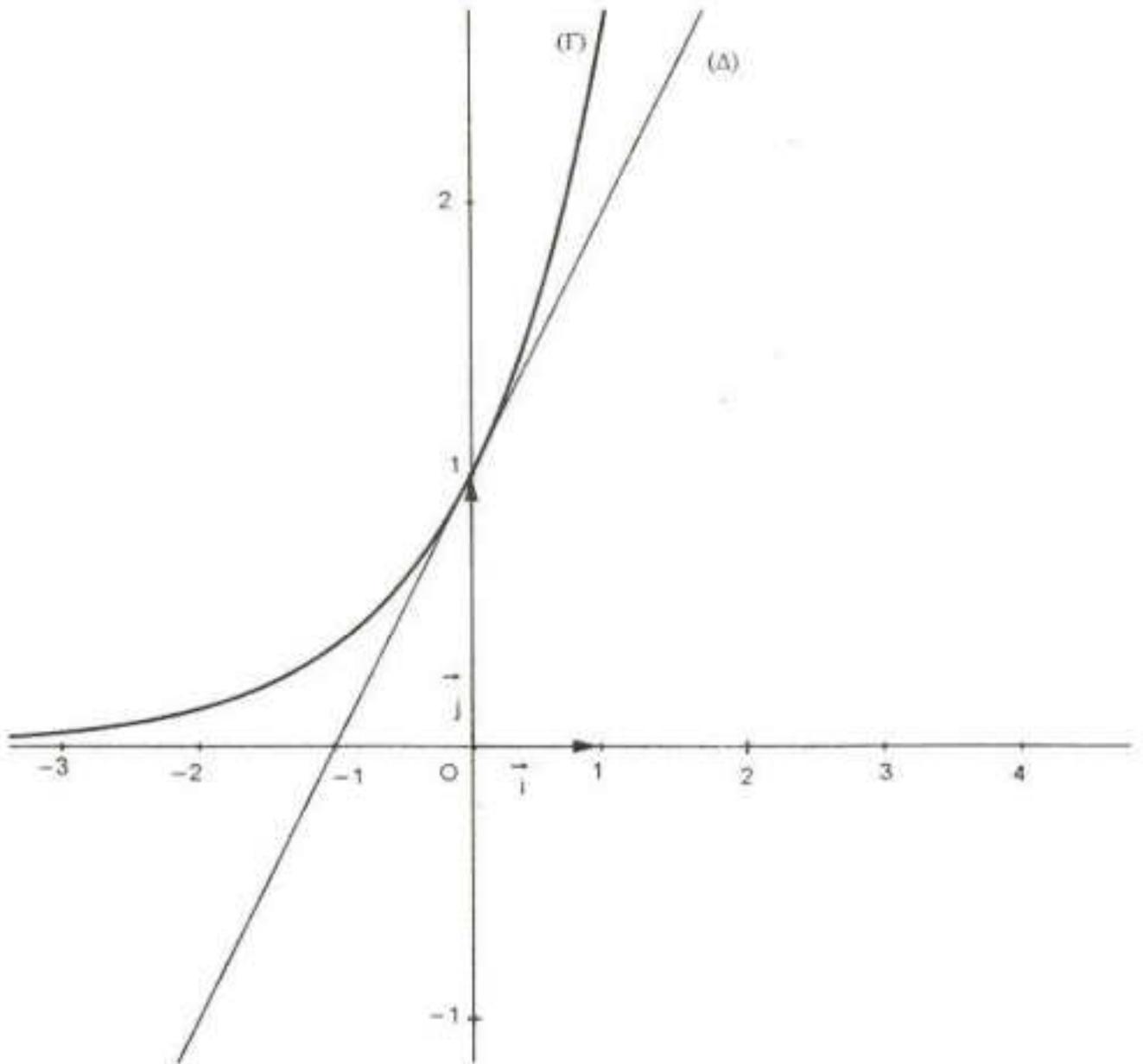


Figure 2