

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences Techniques)

Session de contrôle 2018

Exercice n°1 : (5,5 points)

1. $z^2 + (2+i)z + i = 0$

On a $\Delta = (2+i)^2 - 4i = 3$ d'où $\delta = \sqrt{3}$

Donc $z' = \frac{-2-i-\sqrt{3}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z'' = \frac{-2-i+\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$S_{\mathbb{C}} = \{z'; z''\}$

2. $(E): z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = 0$

a. On a $1^3 + (1+i)1^2 - 2 - i = 0$ d'où $z_0 = 1$ est une solution de (E)

b. On a $z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = (z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + z^2(a-1) + z(b-a) - ib$

Par identification $\begin{cases} a-1=1+i \\ b-a=-2 \\ -b=-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2+i \\ b=i \end{cases}$

donc $z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = (z-1)(z^2 + (2+i)z + i)$

c. On a

$$z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + (2+i)z + i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2 + (2+i)z + i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z=1 \text{ ou } z' = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ou } z'' = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

3. O

a. On a $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

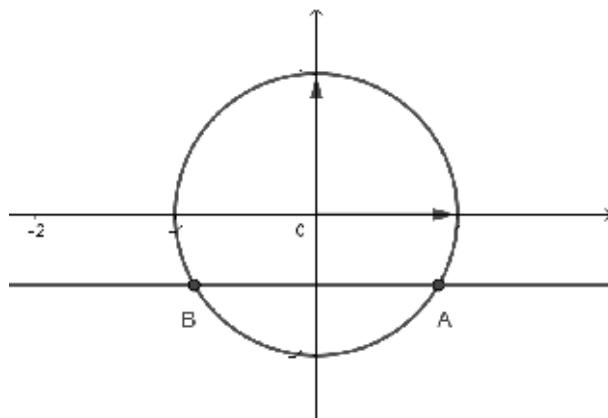
b. On a $|z_A| = |z_B| = 1 \Leftrightarrow OA = OB = 1$ donc A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1

c.

On a $y_A = y_B = -\frac{1}{2}$ et $x_A > 0$

et $x_B < 0$ et A et B

appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1

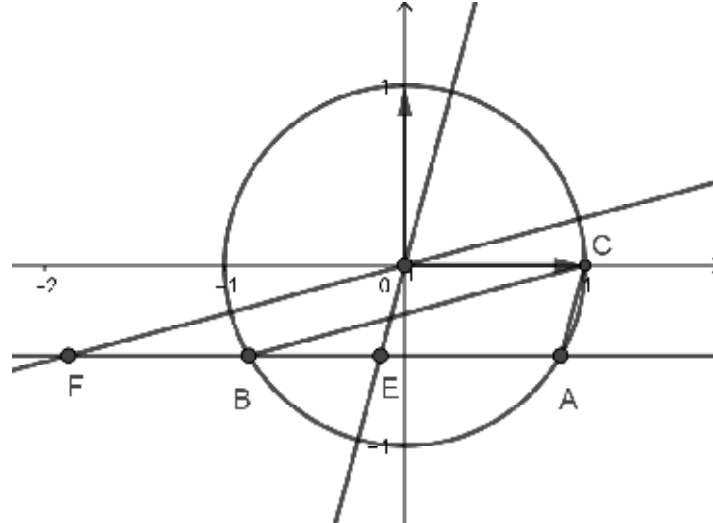


4.

a. On a $\text{aff}(\overrightarrow{CA}) = z_A - z_C = z_A - 1 = z_E = \text{aff}(\overrightarrow{OE}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OE}$ et puisque O, A et C non alignés donc OEAC est un parallélogramme

On a $\text{aff}(\overrightarrow{CB}) = z_B - z_C = z_B - 1 = z_F = \text{aff}(\overrightarrow{OF}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OF}$ et puisque O, B et C non alignés donc OFBC est un parallélogramme

b.



c. On a $e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{-7\pi}{12}} \right) = e^{i\pi} + e^{i\frac{-2\pi}{12}} = -1 + e^{i\frac{-\pi}{6}}$

et $e^{i\frac{13\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{-\pi}{12}} \right) = e^{i\frac{7\pi}{6}} + e^{i\frac{12\pi}{12}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} - 1$

d. On a $z' = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{13\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{-\pi}{12}} \right) = 2e^{i\frac{13\pi}{12}} \cos \frac{\pi}{12}$

$\left(0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \right)$

On a

$z' = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -1 + e^{i\frac{-\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(e^{i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{-7\pi}{12}} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} \cos \frac{7\pi}{12} = -2 \cos \frac{7\pi}{12} e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$\left(\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{12} < \pi \text{ donc } \cos \frac{7\pi}{12} < 0 \right)$

Exercice n°2 : (4,5 points)

1.

a. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$ est dérivable sur $[0;2]$

et pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = \frac{\frac{3}{4} \times 2x}{2\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}} = \frac{3}{4} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}}$

b. Soit $x \in [0;2]$, on a $x^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{4}x^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - 1 = \frac{1}{4}(x^2 - 4) \leq 0$

car $(0 \leq x \leq 2 \text{ donc } 0 \leq x^2 \leq 4)$ donc $x^2 \leq \left(\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}\right)^2$ d'où $x \leq \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$

car $x \in [0;2]$

c. Pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$ donc $0 \leq \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}} \leq 1$

d'où $0 \leq \frac{3}{4} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}} \leq \frac{3}{4}$ ainsi $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

d. On a f est dérivable sur $[0;2]$ et pour tout $t \in [0;2]$, $0 \leq f'(t) \leq \frac{3}{4}$ donc

pour $x \in [0;2]$ d'après le théorème des inégalités des accroissements

finies on a $0 \leq f(2) - f(x) \leq \frac{3}{4}(2 - x)$

donc $0 \leq 2 - f(x) \leq \frac{3}{4}(2 - x)$ pour tout $x \in [0;2]$

2.

a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$ vérifiée

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

On a $0 < u_n < 2$ et puisque f est croissante

donc $f(0) < f(u_n) < f(2)$ d'où $0 < 1 < u_{n+1} < 2$ donc $0 < u_{n+1} < 2$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

b. On a pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leq 2 - f(x) \leq \frac{3}{4}(2 - x)$ et puisque $u_n \in [0;2]$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 \leq 2 - f(u_n) \leq \frac{3}{4}(2 - u_n)$

d'où $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Pour $n=0$, on a $2-u_0=2-1=1=\left(\frac{3}{4}\right)^0$, vérifiée

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Montrons que $0 \leq 2-u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

On a $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $0 \leq (2-u_n) \times \frac{3}{4} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

et puisque $0 \leq 2-u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2-u_n)$ donc $0 \leq 2-u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et puisque $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2-u_n) = 0 \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $-2 \leq -u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$ ainsi

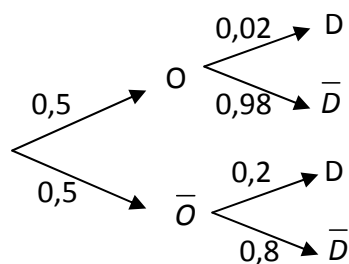
$$2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 \text{ par suite } \sum_{k=0}^{n-1} 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2$$

$$\text{donc } 2n - \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \right) \leq S_n \leq 2n \text{ d'où } 2n - 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) \leq S_n \leq 2n \text{ et par}$$

$$\text{suite } 2 - \frac{4}{n} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) \leq \frac{S_n}{n} \leq 2 \text{ et puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4}{n} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) \right) = 2 \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 2$$

Exercice n°3 : (4 points)



1.

a. On a $p(D \cap O) = p(O)p(D/O) = 0,5 \times 0,02 = 0,01$

b. On a $p(D \cap \bar{O}) = p(\bar{O})p(D/\bar{O}) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$

c. On a $p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - (p(D \cap O) + p(D \cap \bar{O})) = 1 - (0,01 + 0,1) = 0,89$

2. E : « Les quatre bougies soient non défectueuses »

$$p(E) = (p(\bar{D}))^4 = 0,89^4$$

3. X : suit une loi exponentielle de paramètre λ

a. La durée de vie moyenne d'une bougies est 40000 donc $\frac{1}{\lambda} = 40000$ d'où

$$\lambda = \frac{1}{40000} = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

b. On a $p(20000 \leq X \leq 40000) = e^{-\lambda \times 20000} - e^{-\lambda \times 40000} = e^{-0,5} - e^{-1}$

c. On a

$$\begin{aligned} p((X \geq 45000) / (X \geq 40000)) &= \frac{p((X \geq 45000) \cap (X \geq 40000))}{p(X \geq 40000)} = \frac{p(X \geq 45000)}{p(X \geq 40000)} \\ &= \frac{e^{-\lambda \times 45000}}{e^{-\lambda \times 40000}} = e^{-\lambda \times 5000} = e^{-0,125} = 0,88 \end{aligned}$$

Exercice n°4 : (6 points)

1.

a. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^{1-x}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - xe^{1-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - e^{1-x} \right) = -\infty$$

Donc la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

b. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x} \times e \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e}{\frac{e^x}{x}} \right) = 1$ donc la

droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $+\infty$

2.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{1-x} - x(-e^{1-x}) = (x-1)e^{1-x}$

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	1

3.

a. On a $f(x) - 1 = -xe^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - 1$	+	0	-
Position relatif de (ζ) et Δ	(ζ) au dessus de Δ	$(\zeta) \cap \Delta = \{(0;1)\}$	(ζ) au dessus de Δ

b. Soit T la tangente à (ζ) en $I(2; 1 - 2e^{-1})$ donc $T: y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ et

puisque $f'(2) = \frac{1}{e}$ et $f(2) = 1 - \frac{2}{e}$ d'où $T: y = \frac{1}{e}(x - 2) + 1 - \frac{2}{e} = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{4}{e}$ donc

$T = D$

c. On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x - 1)e^{1-x}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = e^{1-x} + (x - 1)(-e^{1-x}) = e^{1-x}(2 - x)$

D'où

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

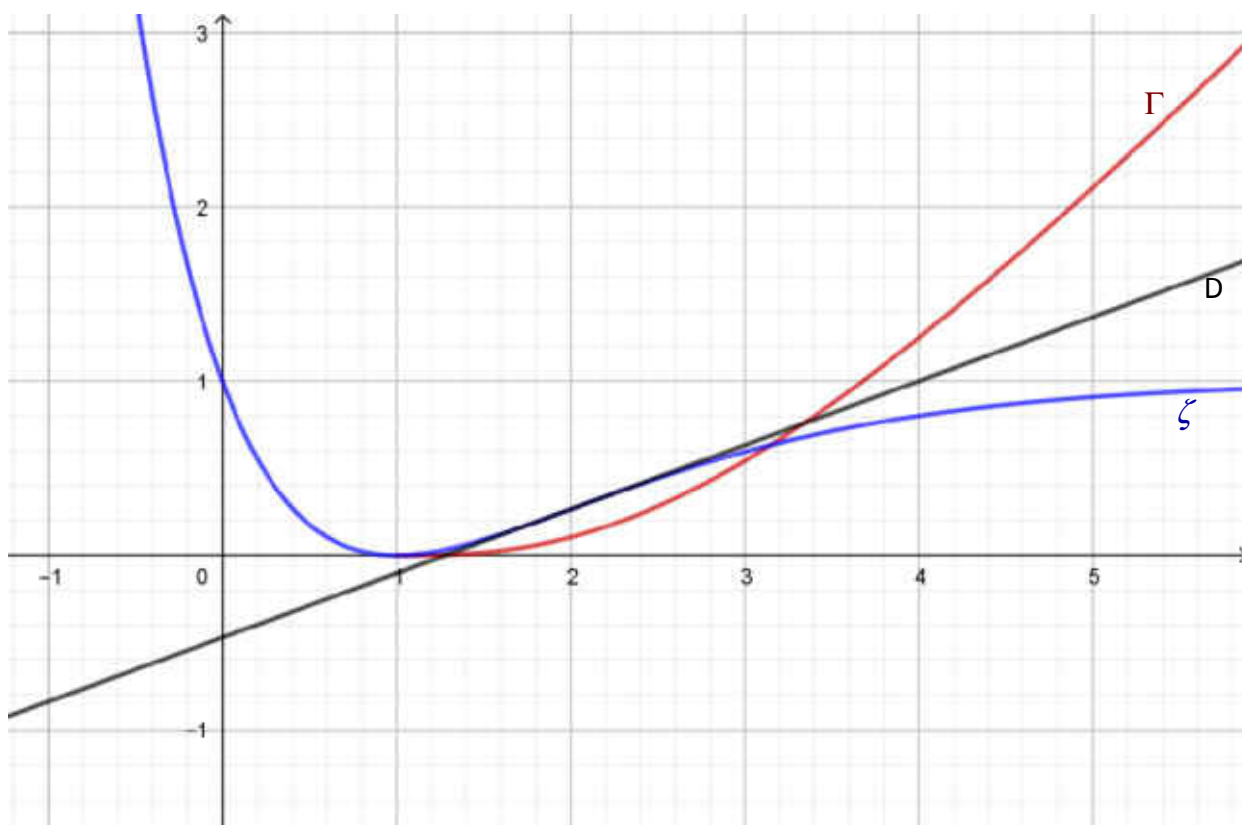
et puisque f'' s'annule en

changeant de signe donc

$I(2; f(2))$ est un point

d'inflexion pour la courbe (ζ)

d.



4.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - e^{1-x} - f'(x) = 1 - e^{1-x} - (x-1)e^{1-x} = 1 - xe^{1-x} = f(x)$

b. On a $A_\alpha = \int_1^\alpha |f(t)| dt = \int_1^\alpha f(t) dt = \int_1^\alpha (1 - e^{1-t} - f'(t)) dt = \left[t + e^{1-t} - f(t) \right]_1^\alpha$
 $= (\alpha + e^{1-\alpha} - f(\alpha)) - (1 + e^0 - f(1)) = \alpha - 3 + (1 + \alpha)e^{1-\alpha} = h(\alpha)$

c.

