

Le sujet comporte 2 pages numérotées 1/2 et 2/2.

Exercice 1 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 ; \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer U_1 et U_2 .
b) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
- 2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 6$ pour tout $n \geq 0$.
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)$ et de premier terme $V_0 = -4$.
b) Exprimer V_n en fonction de n .
- 3) a) Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $U_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$.
b) Calculer alors la limite de la suite (U_n) .

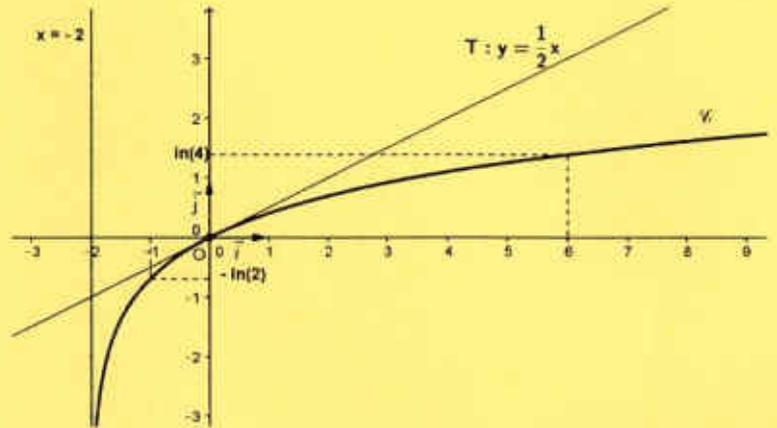
Exercice 2 :(7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -2, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) Vérifier que $f(6) = \ln(4)$ et $f(-1) = -\ln(2)$.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{x+2}$ pour tout x de l'intervalle $] -2, +\infty[$.
b) Déterminer $f'(0)$.
c) Vérifier qu'une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0 est $y = \frac{1}{2}x$.

- 4) Dans la figure ci-contre, on a tracé la courbe \mathcal{C} , la tangente T au point d'abscisse 0 et la droite d'équation $x = -2$



En utilisant le graphique :

- Dresser le tableau de variation de f .
- Préciser le signe de la fonction f sur chacun des intervalles $] -2, 0]$ et $[0, +\infty [$.
- Résoudre dans $] -2, +\infty [$, $-\ln(2) \leq f(x) \leq \ln(4)$.

Exercice 3 : (7 points)

Un sac contient 7 jetons qui portent chacun une lettre de l'alphabet, quatre consonnes et trois voyelles. Les jetons sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard, 3 jetons du sac.

- Vérifier que le nombre de tirages possibles est 35.
- On considère les événements suivants :
 - C : « Obtenir 3 jetons qui portent trois consonnes ».
 - V : « Obtenir 3 jetons qui portent trois voyelles ».
 - Calculer la probabilité de chacun des événements C et V .
 - Justifier que $C \cap V = \emptyset$.
 - En déduire que $p(C \cup V) = \frac{1}{7}$.
- Soit l'événement S : « Obtenir 3 jetons consonnes ou 3 jetons voyelles ».
 - Justifier que $p(\bar{S}) = \frac{6}{7}$.
 - On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite, en remettant à chaque fois les trois jetons tirés dans le sac.

Soit l'événement E : « Réaliser l'événement S exactement 2 fois »

L'une des trois propositions suivantes est vraie. Laquelle ?

- $p(E) = 1 - C_5^2 \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^3$
- $p(E) = C_5^2 \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^3$
- $p(E) = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{6}{7}\right)^3$