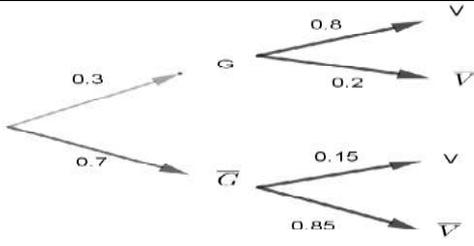


# Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

## Session principale

### Exercice 1 (4 points)

Questions	Solution
1)	
2)	$p(V) = p(V G)p(G) + p(V \bar{G})p(\bar{G})$ $= 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 0.15 = 0.345$
3)	$p(\bar{G} V) = \frac{p(\bar{G} \cap V)}{p(V)} = \frac{0.15 \times 0.7}{0.345} = 0.304$
4)	$p = C_{10}^2 \times (0.8)^2 \times (0.2)^8 = 0.0000737$
5) a/	La probabilité demandée est $(0.2)^n$
b/	$p_n = 1 - (0.2)^n$
c/	$p_n \geq 0.9 \Leftrightarrow 1 - (0.2)^n \geq 0.9 \Leftrightarrow (0.2)^n \leq 0.1$ $\Leftrightarrow n \ln(0.2) \leq \ln(0.1)$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)} \Leftrightarrow n \geq 1.43 \text{ alors le plus petit valeur est } n = 2$

### Exercice 2 (4 points)

Questions	solutions
1) a/	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$ <p>on a <math>1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}</math> et <math>\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}</math> donc</p> $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$
b/	$a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1)$ <p>on a :</p> $= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1) + i \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ <p>et d'autre part on a <math>a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)</math> et par conséquent</p>

	<p>on aura <math display="block">\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \end{cases}</math></p> <p>Or on sait que <math>\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}</math> donc <math display="block">\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \end{cases}</math></p>
2) a/	<p>on a <math>a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}</math> donc <math>a^4 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4 = 16e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(1 - i\sqrt{3})</math>.</p>
b/	<p>b/ <math>z^4 = 8(1 - i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - a^2)(z^2 + a^2) = 0 \Leftrightarrow (z - a)(z + a)(z + ia)(z - ia) = 0 \Leftrightarrow z = a, z = -a, z = ia</math> et <math>z = -ia</math></p>
c/	

### Exercice 3 (5 points)

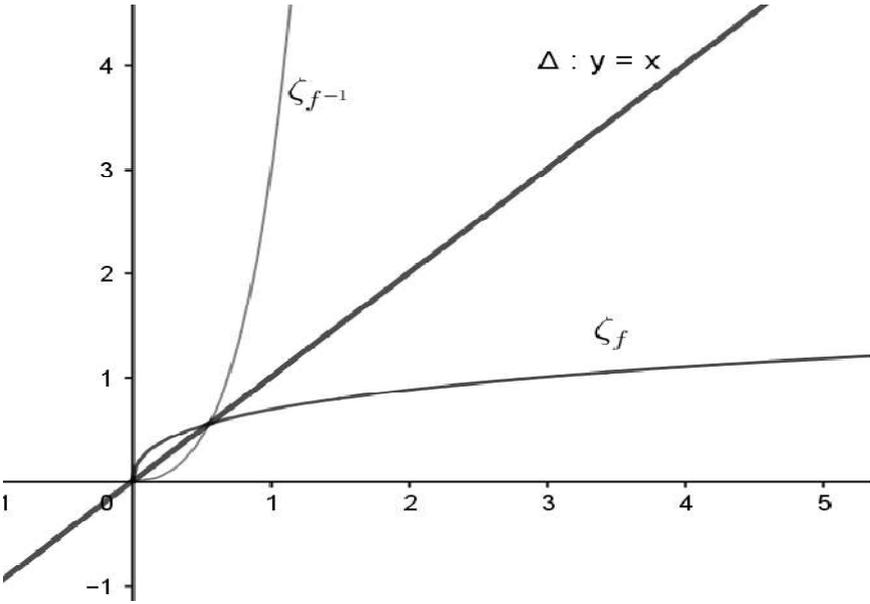
Questions	Solution
1) a/	<p>on a <math>\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}</math> et <math>\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}</math> donc <math>\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}</math> donc les vecteurs <math>\overrightarrow{AB}</math> et <math>\overrightarrow{AC}</math> ne sont pas colinéaires et alors les points <math>A, B</math> et <math>C</math> définissent un plan <math>P</math>.</p>
b/	<p><math>\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}</math> est un vecteur normal à <math>P</math> donc <math>P</math> a pour équation : <math>-6x - 6y + 6z + d = 0</math> et comme <math>A(-2, 1, 1) \in P</math> donc <math>12 - 6 + 6 + d = 0</math> donc <math>d = -12</math> et alors <math>P : -6x - 6y + 6z - 12 = 0</math> alors <math>P : x + y - z + 2 = 0</math></p>

2) a/	on a $2+2-0+2=6 \neq 0$ donc $E \notin P$
b/	$V_{EABC} = \frac{1}{6} \left  (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE} \right  = \frac{1}{6} \left  \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right  = 6$
3)	<p><math>\vec{u}_\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}</math> est un vecteur directeur de <math>\Delta</math> qui est un vecteur normal de P donc <math>\Delta \perp P</math></p> $M(x \ y \ z) \in P \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha + \alpha - (-\alpha + 2) + 2 = 0 \\ x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ <p>Donc <math>P \cap \Delta = \{H(0,0,2)\}</math></p>
4) a/	<p><math>\alpha \neq 0</math> et <math>M(\alpha, \alpha, -\alpha + 2) \in \Delta</math></p> $V_{MABC} = \frac{1}{6} \left  (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} \right  = \frac{1}{6} \left  \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha + 2 \\ \alpha - 1 \\ -\alpha + 1 \end{pmatrix} \right  =  3\alpha $
b/	<p><math>V_{MABC} = 2 V_{EABC} \Leftrightarrow  3\alpha  = 12 \Leftrightarrow \alpha = 4</math> ou <math>\alpha = -4</math> donc  <math>M(4, 4, -2)</math> ou <math>M(-4, -4, 6)</math></p>

### Exercice 4 ( 7 points )

Questions	Solution
1) a/	<p><math>f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})</math></p> <p>On a la fonction <math>x \mapsto 1 + \sqrt{x}</math> est dérivable et strictement positif sur <math>[0, +\infty[</math> alors la fonction <math>f</math> est dérivable sur <math>[0, +\infty[</math> et on a pour tout <math>x \in [0, +\infty[</math>,</p> $f'(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)}$
b/	<p><math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = (+\infty) \times 1 = +\infty</math></p> <p>En effet</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ donc la courbe représentative de } f \text{ admet}$ <p>une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif</p>
c/	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+\sqrt{x})$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\sqrt{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0 \text{ En effet :}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\sqrt{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} = 0$ <p>Donc la courbe représentative de <math>f</math> admet au voisinage de <math>+\infty</math> une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.</p>
d/	
e/	<p><math>f</math> est continu et strictement croissante sur <math>[0, +\infty[</math> donc elle réalise une bijection de <math>[0, +\infty[</math> sur <math>f([0, +\infty[) = [0, +\infty[</math>.</p>
f/	<p>soit <math>x \in [0, +\infty[</math> et <math>y \in [0, +\infty[</math> tel que <math>f^{-1}(x) = y</math></p> $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{y}) = x \Leftrightarrow 1+\sqrt{y} = e^x$ <p style="text-align: right;">donc pour tout</p> $\Leftrightarrow \sqrt{y} = e^x - 1 \Leftrightarrow y = (e^x - 1)^2$ <p><math>x \in [0, +\infty[</math> on a <math>f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2</math></p>
2)	$I = \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]$ <p>On a <math>\frac{1}{4} \leq x \leq 1</math> donc <math>\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1</math> donc <math>\frac{3}{4} \leq x + \sqrt{x} \leq 2</math> donc</p>
a/	$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x + \sqrt{x}} \leq \frac{4}{3} \text{ d'ou } \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3} \text{ soit donc pour tout } x \in I, f'(x) \leq \frac{2}{3}$
b/	<p>On pose <math>u(x) = f(x) - x</math></p> <p><math>u</math> est dérivable sur <math>I</math> et on a pour tout <math>x \in I</math> <math>u'(x) = f'(x) - 1 &lt; 0</math> alors la fonction <math>u</math> est strictement décroissante sur <math>I</math>.</p> <p><math>u</math> est continu et strictement décroissante sur <math>I</math> alors elle réalise une bijection de <math>I</math> sur <math>u(I) = \left[ \ln 2 - 1, \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right] = J</math> et comme <math>0 \in J</math> alors l'équation <math>u(x) = 0</math> admet une unique solution <math>\alpha</math> dans <math>I</math>.</p> <p>De plus <math>u(0.5) \times u(0.6) &lt; 0</math> donc <math>0.5 &lt; \alpha &lt; 0.6</math></p>

<p>3)</p> <p>a/</p>	
<p>b/</p>	$A = 2 \int_0^\alpha (x - f^{-1}(x)) dx = 2 \int_0^\alpha x - (e^x - 1) dx = 2 \int_0^\alpha (x - e^{2x} + 2e^x - 1) dx$ $= 2 \left[ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x - x \right]_0^\alpha$ $= \alpha^2 - e^{2\alpha} + 4e^\alpha - 2\alpha - 3$
<p>4)</p> <p>a/</p>	<p>on a <math>u_0 = 1 \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math> donc vrais pour <math>n=0</math></p> <p>Soit <math>n \in \mathbb{N}</math>, supposons que <math>u_n \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math> et montrons que <math>u_{n+1} \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math></p> <p>On a <math>\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1</math> et <math>f</math> est une fonction strictement croissante sur <math>\left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math> alors</p> $f\left(\frac{1}{4}\right) \leq f(u_n) \leq f(1) \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq u_{n+1} \leq \ln 2 \leq 1 \text{ alors } u_{n+1} \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]$ <p>par suite pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math> <math>u_n \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math>.</p>
<p>b/</p>	<p><math>f</math> est dérivable sur <math>\left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math> et pour tout <math>x \in \left[ \frac{1}{4}, 1 \right]</math>, <math>f'(x) \leq \frac{2}{3}</math> donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le fait que <math>u_n, \alpha \in I</math> donc</p> $ f(u_n) - f(\alpha)  \leq \frac{2}{3}  u_n - \alpha  \Leftrightarrow  u_{n+1} - \alpha  \leq \frac{2}{3}  u_n - \alpha $ <p>et on montre par récurrence sur <math>n</math> que pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math> <math> u_n - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n</math></p> <p>On a <math> u_0 - \alpha  =  1 - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1</math> donc la propriété est vraie pour <math>n=0</math></p>

	<p>Soit <math>n \in \mathbb{N}</math> supposons que <math> u_n - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n</math> et montrons que <math> u_{n+1} - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}</math></p> <p>On sait que <math> u_{n+1} - \alpha  \leq \frac{2}{3} u_n - \alpha </math> donc</p> $ u_{n+1} - \alpha  \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ alors }  u_{n+1} - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ <p>et par suite pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math> on a <math> u_n - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n</math></p>
c/	<p>c/ on a <math> u_n - \alpha  \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n</math> et <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0</math> donc <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha</math></p> <p>donc la suite est convergente et converge vers <math>\alpha</math></p>
d/	<p>on a <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha</math> et <math>f^{-1}</math> est continu en <math>\alpha</math> donc <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha</math></p>