


| | | |
|---|--|---|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020 | Session principale | |
| |  Épreuve : Mathématiques | Section : Sciences Techniques |
| | Durée : 3h | Coefficient de l'épreuve: 3 |

Ϣ Ϣ Ϣ Ϣ Ϣ Ϣ

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.
- L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

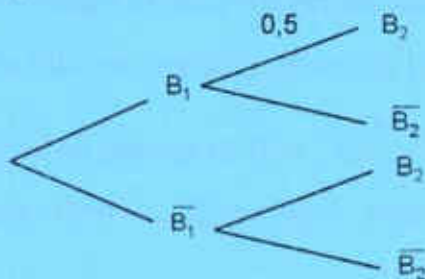
Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et la mettre dans U_2 , puis tirer au hasard une boule de U_2 et la mettre dans U_1 .

Soient les événements :

B_1 : « La boule tirée de U_1 est blanche » et B_2 : « La boule tirée de U_2 est blanche ».

1) a) Vérifier que $P(B_2 / B_1) = 0,5$.

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette épreuve.



c) Montrer que $P(B_2) = 0,4$.

d) Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, qu'elle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit blanche ?

2) Soit l'événement E : « La boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est noire ». Vérifier que $P(E) = 0,3$.

3) Calculer la probabilité de l'événement F : « A la fin de l'épreuve, la répartition des boules dans les deux urnes reste inchangée ».

4) On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules noires restant dans l'urne U_2 à la fin de l'épreuve.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(2,0,2)$, $B(2,1,1)$, $C(1,2,1)$ et $E(-1,-1,0)$.

1) a) Montrer que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) a) Montrer que les points A, B, C et E sont non coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

c) Montrer que la distance du point E au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{3}$.

3) Soit Δ la droite passant par E et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Vérifier que le système
$$\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$
, est une représentation paramétrique de Δ .

b) Vérifier que le point $I(1,1,2)$ appartient à Δ .

c) Montrer que le point I est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

4) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 12 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S suivant le cercle Γ .

5) Soient F le point défini par $\overline{IF} = \frac{1}{2}\overline{EF}$ et S' la sphère de centre F et de rayon $\sqrt{14}$.

Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant le cercle Γ .

Exercice 3 (5 points)

1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation, $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1+i = 0$.

2) Soit dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^3 - \sqrt{2}(2+i)z^2 + (1+3i)z + \sqrt{2}(1-i) = 0$.

a) Vérifier que $\sqrt{2}$ est une solution de (E).

b) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^3 - \sqrt{2}(2+i)z^2 + (1+3i)z + \sqrt{2}(1-i) = (z - \sqrt{2})(z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1+i).$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , les points

A, B d'affixes respectives : $z_A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_B = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Montrer que $z_B = i(\sqrt{2}-1)z_A$.

- b) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.
- 4) a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AB] et le mettre sous forme exponentielle.
b) Construire le point I dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe.
- 5) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle OAB.
a) Montrer que I est le centre de (ζ) .
b) Montrer que la droite (AI) est parallèle à l'axe des abscisses.
c) Construire les points A et B dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe.
- 6) La perpendiculaire à la droite (OI) et passant par le point I coupe la droite (O, \vec{u}) en un point C.
Déterminer l'affixe de C.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.
b) Dresser le tableau de variations de f .
- 3) a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = 2e^x(2e^x - 1)$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f .
b) En déduire que le point $A(-\ln 2, \frac{5}{4})$ est un point d'inflexion de la courbe (C) .
- 4) On a tracé dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe la tangente T à la courbe (C) au point A.
a) Vérifier que le point $B(\ln 2, 2)$ appartient à la courbe (C) et le construire dans la **figure 2**.
b) Construire la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 5) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $\mathcal{A} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.
- 6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{x-1})$.
c) Construire, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (C') de la fonction réciproque g^{-1} de g .
d) En exploitant le graphique, calculer $\int_1^2 \ln(1 + \sqrt{x-1}) dx$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

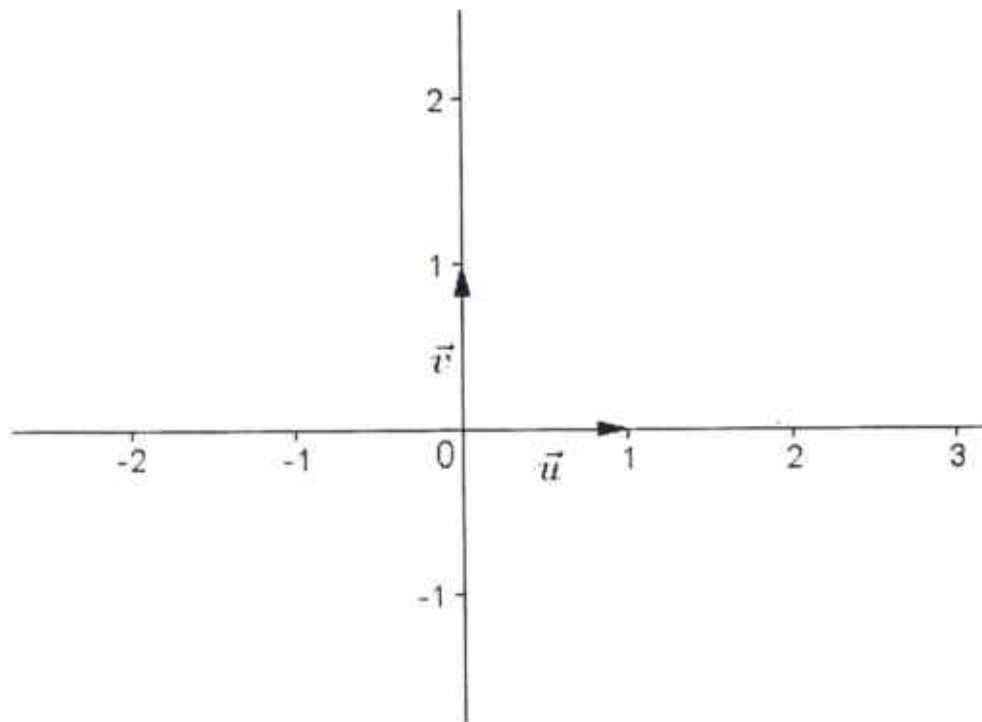


Figure 2

