RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5,5 points)

Soit un réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (i + 2e^{i\theta})z + e^{2i\theta} + ie^{i\theta} = 0$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = i + e^{i\theta}$ et $z_C = e^{i\theta}$.

a) Vérifier que $\frac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = ie^{i\theta}$.

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

3. Dans cette question on suppose que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Justifier que le quadrilatère OABC est un losange.

b) Vérifier que $1 + e^{2i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$.

c) On désigne par $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du losange OABC. Montrer que $\mathcal{A}(\theta) = \cos\theta$.

4. a) Ecrire les nombres complexes $(1 + i\sqrt{3})$ et $(1 - i)$ sous forme exponentielle.

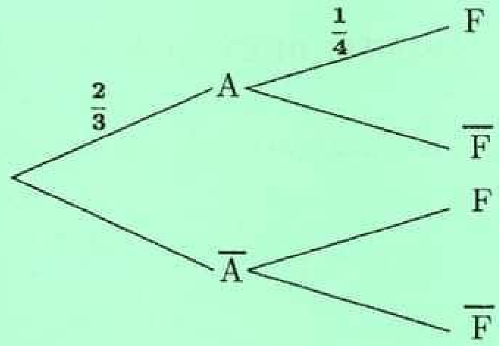
b) Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i\sqrt{3})(1 - i) = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

d) Construire alors, dans la **figure 1** de l'annexe, un losange d'aire égale à $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

✎Exercice 2 (3,5 points)

On considère l'arbre de probabilité ci-contre où A et F sont deux évènements tels que la probabilité de F est $p(F)=\frac{5}{12}$.



1. Montrer que $p(\overline{A}\cap F)=\frac{1}{4}$.

2. Calculer alors $p(F/\overline{A})$.

3. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.

4. Calculer $p(\overline{A}/\overline{F})$.

✎Exercice 3 (4 points)

1. On considère la suite (K_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par $K_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$.

   a) Montrer que $K_1=\frac{1}{2}\ln 2$.

   b) Vérifier que pour tout entier $n\geq 1$, $K_{n+2}+K_n=\frac{1}{n+1}$.

   c) En déduire la valeur de K_3.

   d) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, $0\leq K_n\leq \frac{1}{n+1}$.

   e) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} K_n$.

2. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par $I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,dx$.

   a) Montrer que $I_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{2}{n+1}K_{n+2}$, $n\geq 1$.

   b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

✎Exercice 4 (7 points)

A) **1.** Donner le sens de variation de la fonction u définie sur IR par $u(x) = 1 + xe^{x}$.

2. En déduire que pour tout réel x, $1 + xe^{x} > 0$.

B) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -x + \ln(1 + xe^{x})$ et on désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (ζ) et la droite Δ.

2. **a)** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(x + e^{-x})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter les résultats.

3. **a)** Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{1 + xe^{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4. On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction h définie sur IR par $h(x) = x + 2 - e^{x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$.

b) On note f'' la dérivée seconde de f.

Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{h(x)e^{x}}{(1 + xe^{x})^{2}}$.

c) En déduire que les points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(\beta, f(\beta))$ sont deux points d'inflexion de la courbe (ζ) représentative de f.

5. Dans la **figure 2** de l'annexe, on a tracé les tangentes (T_A) et (T_B) à la courbe (ζ) respectivement aux points A et B et la droite Δ.

On a placé sur l'axe des abscisses les réels α et β.

a) Placer les points A et B dans la **figure 2**.

b) Tracer la courbe (ζ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6. Pour tout réel $\lambda > 1$, on désigne par $\mathcal{A}_{\lambda}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln x \le f(x) \le \ln x + \ln(1 + e^{-1})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_{\lambda}$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\mathcal{A}_{\lambda}}{\lambda \ln \lambda}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2022)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

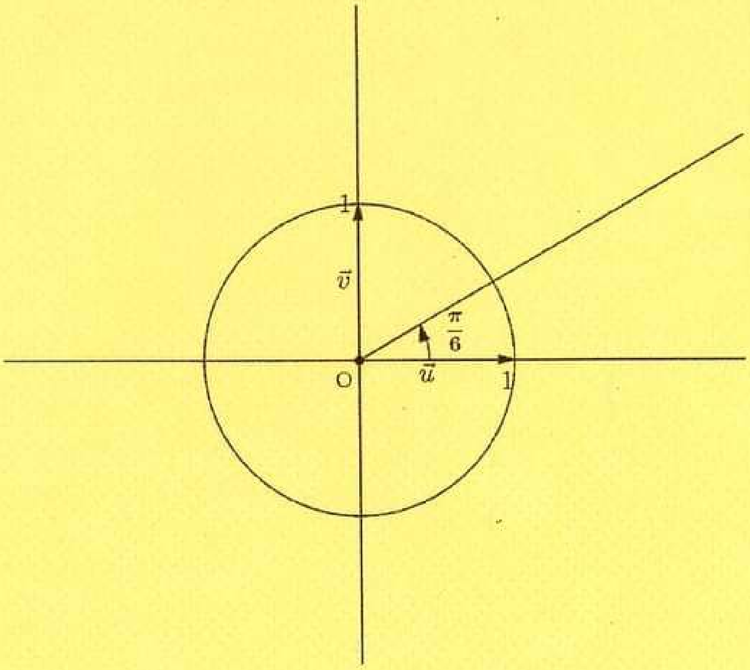


Figure 2