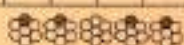


| | | |
|---|--------------------------------|-------------------------------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION | EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Session de contrôle 2023 |
| | Épreuve : Mathématiques | Section : Mathématiques |
| | Durée : 4h | Coefficient de l'épreuve : 4 |

N° d'inscription



Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

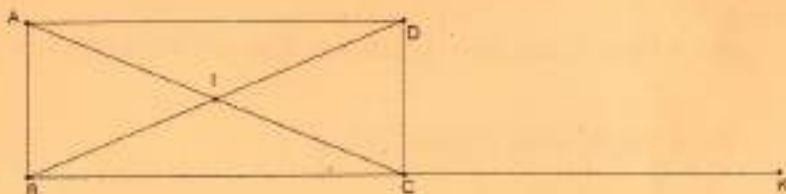
Exercice 1 (5 points)

Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle de centre I tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

et K est le symétrique de B par rapport à C.

- Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que $R(A) = B$ et $R(C) = D$.
 - Montrer que R est la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- On désigne par E et F les symétriques respectifs de I par rapport à B et D.



Soit S la similitude directe qui envoie A en E et C en F.

- Déterminer le rapport et l'angle de S.
 - Montrer que I est le centre de S.
- Soit $h = R \circ S^{-1}$ où S^{-1} est la similitude réciproque de S.
Montrer que h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$.
- Soit $S' = S_{(CD)} \circ h$, où $S_{(CD)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (CD).
 - Montrer que S' est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
 - Montrer que $S'(E) = K$ et $S'(F) = D$.
 - Soit G le symétrique de I par rapport à C et J le milieu de [DK].
Déterminer $S'(I)$ et $S'(G)$.
 - Soit H le milieu du segment [CD].
 - Déterminer $h(J)$ et en déduire que J est le milieu de [FG].
 - Montrer que le centre Ω de S' est le centre de gravité du triangle IFG.
 - Déterminer l'axe de S'.

Exercice 2 (4 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont marquées $-2 ; -2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1$ et d'une boîte contenant deux cartes vertes et trois cartes rouges. Toutes les cartes sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à lancer le dé deux fois de suite. On s'intéresse au produit des deux nombres obtenus.

- Si le produit des deux nombres obtenus est positif, on tire simultanément trois cartes de la boîte.
- Si le produit des deux nombres obtenus est négatif, on tire simultanément deux cartes de la boîte.

1. On considère les événements :

A : « Le produit des nombres obtenus est positif. »

B : « Avoir deux cartes vertes. »

a) Montrer $P(A) = \frac{5}{9}$.

b) Montrer que $P(B) = \frac{19}{90}$.

2. On a obtenu deux cartes vertes, calculer la probabilité qu'on a obtenu un produit positif.
3. Un magasin offre une réduction à ses clients moyennant le jeu précédent. Le client bénéficie d'une réduction de 20 dinars sur chaque carte verte tirée et aucune réduction sur les cartes rouges. Soit X la variable aléatoire égale à la réduction totale en dinars obtenu par un client.

a) Montrer que $P(X = 0) = \frac{17}{90}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x+1}} ; \text{ si } x > -1, \\ f(-1) = 0. \end{cases}$$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que f est continue à droite en -1 .
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = 0$. Interpréter le résultat.
3. a) Vérifier que pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} f(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
4. a) Montrer que f réalise une bijection f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α qui appartient à $[0.4, 0.6]$.
5. Dans l'annexe jointe, on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe ζ et les droites d'équations respectives $y = 1$ et $y = x$.
Représenter la courbe ζ' de la fonction f^{-1} dans le même repère.
6. Soit $\lambda > 0$, on note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \lambda$.
a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$, $1 - u \leq e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}$.
b) Montrer que $\lambda - \ln(\lambda + 1) \leq A(\lambda) \leq \lambda - \ln(\lambda + 1) + \frac{\lambda}{2(\lambda + 1)}$.
c) En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda}$.
7. Soit $(u_n)_n$ la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^\alpha \frac{f(x)}{(x+1)^{n+2}} dx$.
a) Calculer u_0 .
b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \frac{\alpha}{n+1}$.
c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
d) En utilisant une intégration par parties, montrer que $u_n = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^n} - \frac{1}{e} + nu_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.
e) Montrer alors que la suite $(nu_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 4 (4 points)

Soit a un entier.

1. Copier et compléter le tableau ci-dessous.

| | | | | | | | |
|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste modulo 7 de a | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Reste modulo 7 de a^2 | | | | | | | |

Soit n un entier positif ou nul. On pose $P_n(x) = x^2 + 2(n+1)^3 x + 1$.

2. Dans cette question, on suppose que $n \equiv -1 \pmod{7}$.

Résoudre dans \mathbb{Z} , $P_n(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

3. Dans cette question, on suppose que 7 ne divise pas $n+1$.

a) Montrer que $(n+1)^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

b) Vérifier que $P_n(x) \equiv (x + (n+1)^3)^2 \pmod{7}$.

c) Résoudre dans \mathbb{Z} , $P_n(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

4. Résoudre dans \mathbb{Z} , $P_{2023}(x) \equiv 0 \pmod{7}$.

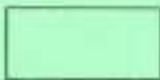


Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2023)
Annexe à rendre avec la copie

