

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques	
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4	

N° d'inscription

**Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.**

Exercice 1 (4.5 points)

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $2\sqrt{3}z^2 - (7 - i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - 2i = 0$.

- 1) a) Vérifier que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est une solution de (E).
b) Déterminer l'autre solution sous forme exponentielle.

- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, ζ est le cercle de centre O et de rayon 1 et P est un point de ζ d'affixe $z_P = e^{i\theta}$, où θ est un réel de $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

- a) Construire le point Q d'affixe $z_Q = e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$.
- b) La tangente à ζ en Q coupe la droite (OP) au point M d'affixe z_M .

Montrer que $z_M = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\theta}$.

- c) Construire le point N d'affixe $z_N = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- d) Vérifier que les points M et N sont distincts.

- 3) a) Montrer que $z_M - z_N = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$.

- b) Montrer que $z_M - z_Q = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$.

- c) Pour quelle valeur de θ , le triangle MNQ est-il rectangle en M ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle ABC est isocèle en A tel que

$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$, J est le milieu du segment [AC], I est le point tel que $\overline{AC} = \sqrt{2} \overline{AI}$

et K est le point tel que le triangle AJK est isocèle en A et $(\overline{AJ}, \overline{AK}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

et S la similitude directe telle que $S(B) = I$ et $S(I) = K$.

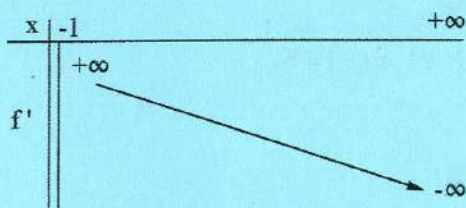
- 1) Justifier que $h \circ R = R \circ h$.
- 2)
 - a) Déterminer $h \circ R(B)$.
 - b) Vérifier que $h(I) = J$.
 - c) Montrer que $S = h \circ R$.
 - d) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overline{IB}, \overline{IK})$.
- 3) Soit $E = S(K)$.
 - a) Montrer que $(\overline{KI}, \overline{KE}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 - b) Déterminer $S \circ S \circ S(B)$. En déduire que les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.
 - c) Construire le point E.
- 4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = I$ et $g(I) = K$. On note Ω le centre de g.
 - a) Déterminer le rapport de g.
 - b) Déterminer $g \circ g(B)$. En déduire que Ω est la symétrique de B par rapport à K.
- 5) Soit F le milieu du segment $[I \Omega]$.
 - a) Montrer que $F = g(K)$.
 - b) Justifier que $(\overline{KI}, \overline{KF}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 - c) En déduire que le triangle KEF est équilatéral.

Exercice 3 (7 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = x - (x-1)\ln(x+1)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
- b) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à (C) .
- 2) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2}{x+1} - \ln(x+1)$.
- 3) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f' .



- a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -1, +\infty[$ une unique solution α telle que $1.3 < \alpha < 1.4$.
- b) En déduire le signe de $f'(x)$.
- c) Dresser le tableau de variation de f . (On précisera $f(0)$ et $f(1)$).
- 4) Tracer la courbe (C) , (on prendra $\alpha = 1.35$).
- 5) a) Montrer que pour tout $x > -1$, $\int_0^x (t-1)\ln(t+1)dt = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) + \frac{1}{4}(6x - x^2)$.
- b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

B/ Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $a_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$.

- 1) a) Justifier que pour tout $x \in] -1, 1[$, $f'(x) \geq 1 - \ln 2$.
- b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}$.
- 2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\int_0^{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} (f(x))^n dx \leq \left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n$.
- b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1 - \ln 2}{\sqrt{n}}\right) = -\infty$.
- d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 4 (3.5 points)

- 1) Soit dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $5u - 53v = 24$.
 - a) Vérifier que $(26, 2)$ est une solution de (E).
 - b) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E).
- 2) Soit $x \in \mathbb{Z}$.
 - a) Déterminer les restes modulo 5 de $x^2 - x$.
 - b) Montrer que $(x - 27)^2 \equiv x^2 - x - 13 \pmod{53}$.
- 3) On considère dans \mathbb{Z} le système (S) :
$$(S): \begin{cases} x^2 - x \equiv 1 \pmod{5} \\ x^2 - x \equiv 13 \pmod{53} \end{cases}$$
 - a) Montrer que x est une solution de (S) si et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que
$$\begin{cases} x = 3 + 5u \\ x = 27 + 53v \end{cases}$$
 - b) Déterminer les solutions du système (S).
- 4) Déterminer dans \mathbb{Z} , les solutions de l'équation $x^2 - x - 66 \equiv 0 \pmod{265}$.

Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

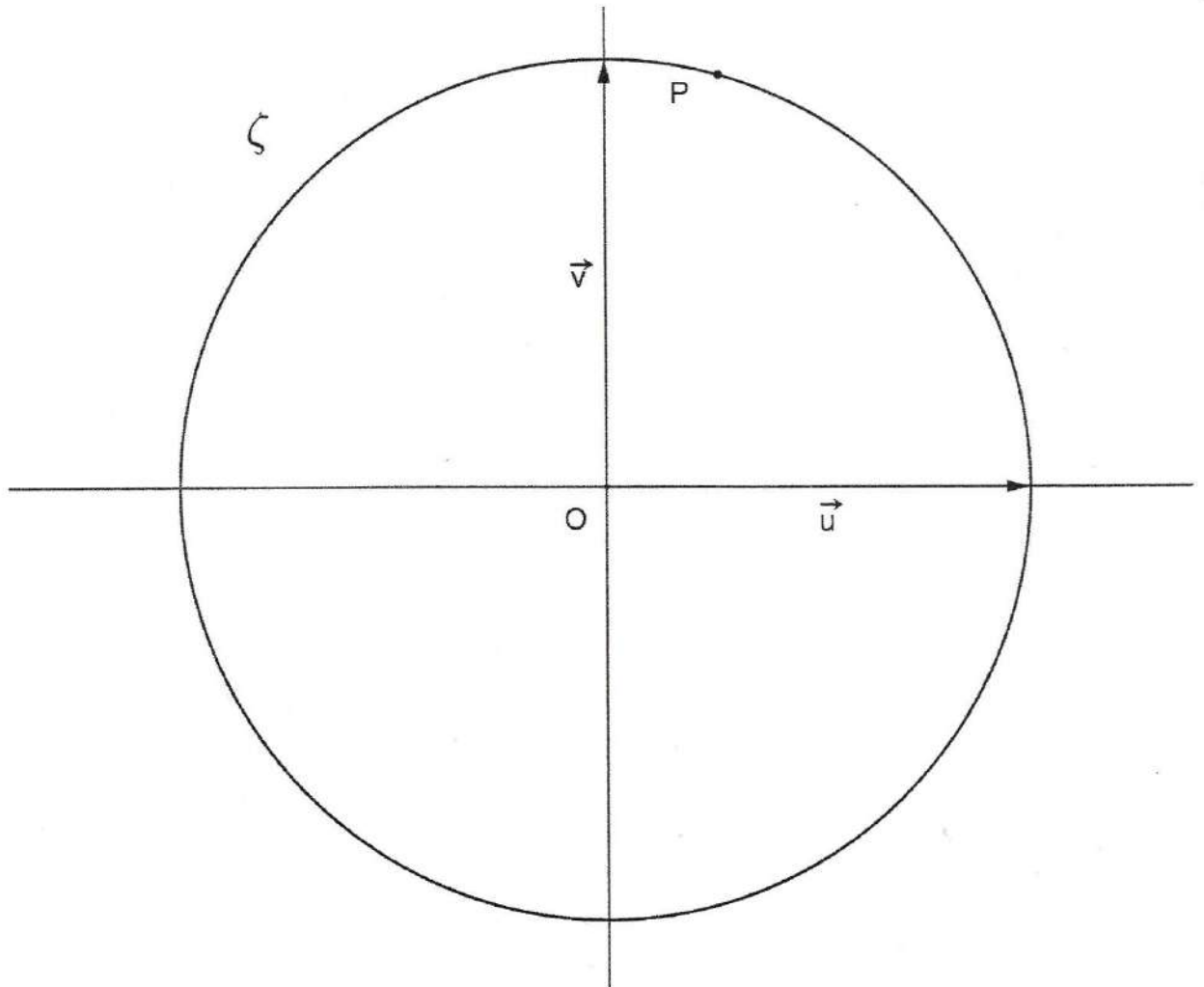
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2

