

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences expérimentales	
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3	

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages. La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

- On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 3(\sqrt{3} + i)z + 4(1 + i\sqrt{3}) = 0$.
 - Vérifier que $(\sqrt{3} + i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.
 - Résoudre l'équation (E).
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1 + i)z_A$.
Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.
 - Vérifier que $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.
 - Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.
 - Ecrire z_A sous forme exponentielle.
 - Donner alors l'écriture de z_D sous forme exponentielle.
 - Construire le point D.
- Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.
 - En déduire qu'il existe un unique réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \theta = \frac{1}{2}$.
 - Soit E le point d'affixe $z_E = 2 + i$ et H son projeté orthogonal sur l'axe (O, \vec{u}) .
Calculer $\frac{HE}{OH}$.
 - En déduire que $z_E = \sqrt{5} e^{i\theta}$.
- Soit C le point d'affixe z_C tel que ABCD est un carré.
 - Montrer que $z_C = (2 + i)z_A$.
 - Donner à l'aide de θ l'écriture exponentielle de z_C .

Exercice 2 (4 points)

Dans une région, 25% des chevaux sont touchés par une maladie contagieuse.

Un test aide à la détection de cette maladie.

- Si le cheval est malade, le test est positif dans 96% des cas.
- Si le cheval n'est pas malade, le test est négatif dans 92% des cas.

1. On choisit au hasard un cheval de cette région.

On considère les événements suivants :

- M : « Le cheval est malade » et \bar{M} : « Le cheval n'est pas malade ».
- T : « Le test est positif » et \bar{T} : « Le test est négatif ».

a) Donner les probabilités $p(M)$, $p(T/M)$ et $p(\bar{T}/\bar{M})$.

b) Montrer que $p(T) = 0,3$.

c) Calculer la probabilité que le cheval choisi soit malade sachant que son test est positif.

2. Un fermier de cette région possède un troupeau de 5 chevaux.

Pour dépister la maladie dans ce troupeau, il procède comme suit :

Le fermier choisit au hasard un cheval et effectue le test.

- ✓ Si le cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux.
- ✓ Si le cheval est testé négatif, le fermier teste un deuxième cheval. Si le deuxième cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux. Si le deuxième cheval est testé négatif, le fermier teste un troisième cheval et continue à procéder de la même manière jusqu'à ce qu'il obtienne un cheval testé positif, s'il existe.
- Si les 5 chevaux sont testés négatifs alors ils ne seront pas vaccinés.

Pour un seul cheval, le test de dépistage coûte 10 dinars et le vaccin coûte 40 dinars.

Soit X l'aléa numérique égal à la dépense du fermier en dinars.

a) Calculer $p(X = 50)$.

b) Montrer que $p(X = 220) = 0,21$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + 2x$ et on désigne par (ζ_f)

sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (ζ_f) et Δ .

2. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (e^x + 1)(2 - e^x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $-0,3 < \alpha < -0,2$ et $1,2 < \beta < 1,3$.

d) Montrer que pour tout $x \in [\alpha, 0]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{f(x)}{1-f(x)} \leq 1$.

3. Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a placé dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les réels α et β .

a) Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (ζ_f) .

b) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (ζ_f) et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \ln 2$.

B) 1. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \int_{\alpha}^0 (f(t))^n dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq -\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. Soit (S_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \int_{\alpha}^0 \frac{f(t)}{1-f(t)} (1-(f(t))^n) dt$.

b) Montrer que la suite (S_n) est croissante et majorée.

c) Montrer alors que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ et que $0 \leq \ell < 0,3$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2, -1, 0)$, $B(1, 3, 1)$, $C(0, 1, 1)$ et $I(1, 0, -2)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.
c) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $2x - y - 2z + 3 = 0$.
2. a) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P.
b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCI.
3. a) Déterminer une équation de la sphère (S) de centre I et tangente à P.
b) Justifier que le point $H(-1, 1, 0)$ est le point de contact de (S) et P.
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IH).
4. Soit ζ le cercle du plan P de centre H et tangent à la droite (AC).
 - a) Montrer que le cercle ζ est de rayon $r = 1$.
 - b) Montrer qu'il existe un point M de la droite (IH), distinct de I, tel que la distance $d(M, P)$ de M à P est égale à 3.
 - c) En déduire que les deux sphères de centres respectifs M et I et de rayon $R = \sqrt{10}$ coupent P suivant le cercle ζ .

Section : N° d'inscription : Série :

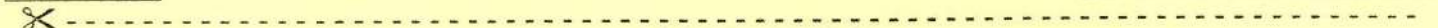
Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....

.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

figure 1

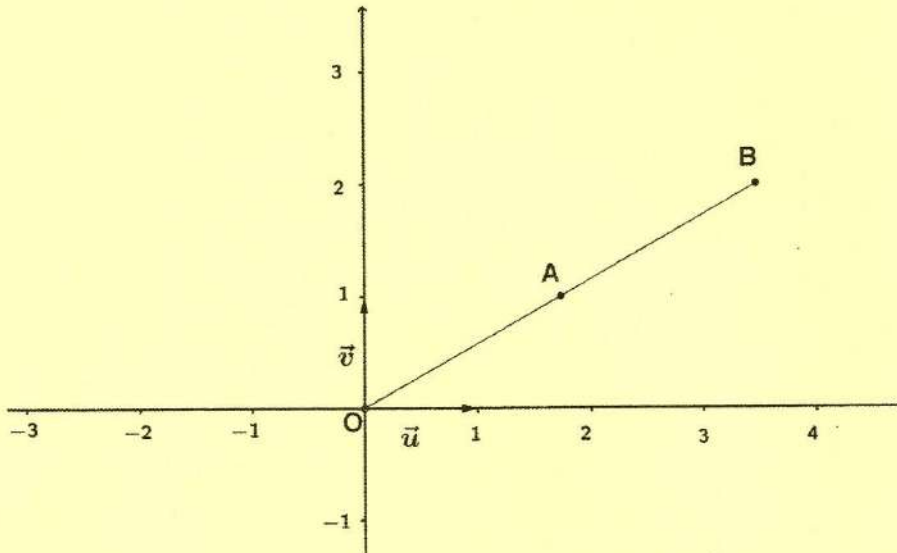


figure 2

