

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences Techniques	
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3	

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5. La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points) :

1) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $e^{i\frac{\pi}{4}}z^2 - \left(i + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)z + i = 0$.

- Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).
- En déduire l'autre solution de (E) et la mettre sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les

points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} - i$.

a) Ecrire $1 + i$ sous forme exponentielle.

b) Vérifier que $z_C - z_A = (2 - \sqrt{2})z_B$.

En déduire que les droites (AC) et (OB) sont parallèles.

3) a) Montrer que $i(z_B - z_C) = \overline{z_B - z_A}$.

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle en B.

4) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A et on a construit le cercle ζ de centre O et de rayon 1.

a) Vérifier que le point B appartient au cercle ζ . Construire le point B.

b) Soit T la tangente à ζ en B.

Montrer que T est la médiatrice du segment [AC].

c) Construire alors sur la **figure 1** le point C.

Exercice 2 (5 points) :

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 2, 0)$ et $I(1, 1, 1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x - y + z + 1 = 0$.

c) Vérifier que le point $H\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point I sur le plan P .

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0.$$

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $R = 2$.

b) Vérifier que les points A et B appartiennent à S .

c) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle \mathcal{C} que l'on caractérisera.

d) Montrer que la droite (AB) coupe le cercle \mathcal{C} en A et B .

3) On considère le plan $Q : z - 1 = 0$.

a) Montrer que P et Q sont sécants suivant la droite (AB) .

b) Soit le point $E(1, 1, 3)$. Vérifier que E appartient à S .

c) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

Montrer que : $\vec{IE} \cdot \vec{IM} = 0$ si et seulement si M appartient à Q .

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que le triangle IME soit rectangle et isocèle en I .

Exercice 3 (4.5 points) :

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n} \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - U_n^2 = U_n(2 - U_n)$.

En déduire que la suite (U_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$.

2) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \ln 2 - \ln U_n$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on précisera le premier terme.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 \ln 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln 2 - \frac{S_n}{n}} = 2$.

Exercice 4 (6.5 points) :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x) - 1)^2$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Vérifier que pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Interpréter graphiquement les résultats.

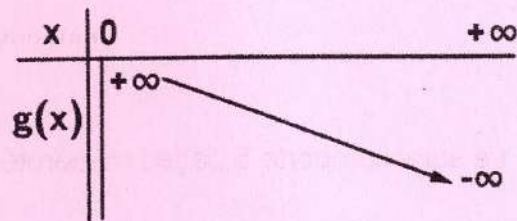
2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2(\ln(x) - 1)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

On donne ci-contre le tableau de variation de g .



a) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

b) En déduire la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

la droite Δ et on a placé le point $E(e, 0)$.

Tracer la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0, e]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0, e]$ sur $[0, +\infty[$.

On note h^{-1} la fonction réciproque de h et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

b) Tracer sur la **figure 2** la courbe (Γ) .

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e f(x)dx = -1 - \int_1^e xf'(x)dx$.

b) Montrer que $\int_1^e xf'(x)dx = 2(2 - e)$.

c) Déduire l'aire \mathcal{A} , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$ et $x = 1$.

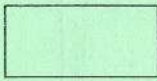


Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

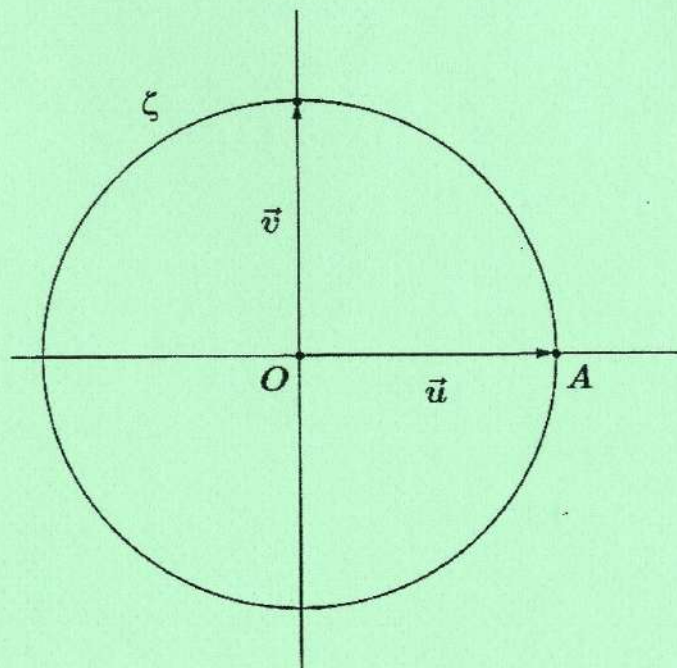


Figure 2

