RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3.5 points)

A l'aide d'une perfusion, on introduit un médicament dans le sang d'un malade.

La perfusion est programmée de façon que la concentration C (en microgrammes par cm^3) du médicament dans le sang ne dépasse pas 200 $\mu g/cm^3$.

Le tableau suivant donne pour ce malade, le temps T (en minutes) mis pour atteindre la concentration C (en $\mu g/cm^3$).

C	24	72	104	120	128	144	160	176	184
T	70	161	242	294	323	395	495	635	786

1. Compléter dans la **figure 1** de l'annexe, le nuage de points de la série (C,T).
2. On pose $X = \ln(200 - C)$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la série (X,T). (Les valeurs de X sont arrondies à 10^{-1}).

X	5.2	4.9	4.6	4.4	4.3	4	3.7	3.2	2.8
T	70	161	242	294	323	395	495	635	786

   a) Déterminer l'arrondi à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire entre X et T.

   b) En déduire que l'on peut exprimer le temps T en fonction de la concentration C par une relation de la forme $T = \alpha + \beta\ln(200 - C)$, où α et β sont deux réels qui seront arrondis à 10^{-1}.

3. Dans cette question les résultats seront **arrondis à l'unité.**

   a) Estimer le temps T_1 mis pour atteindre la concentration $C_1 = 190\ \mu g/cm^3$.

   b) L'efficacité du médicament est optimale lorsque sa concentration est comprise entre 190 $\mu g/cm^3$ et 197 $\mu g/cm^3$.

   Déterminer la durée de l'efficacité optimale du médicament.

Exercice 2 (5 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 - 2(\sqrt{3}+i)z + 8(1+i\sqrt{3}) = 0$.

   a) Vérifier que $4i$ est une solution de (E).

   b) Déterminer l'autre solution de (E).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans **la figure 2** de l'annexe, (ζ) est le cercle de centre O et de rayon 4 ; A, B et C sont les points de (ζ) d'affixes $z_A = -4$, $z_B = 4$ et $z_C = 4i$.

2. On considère le point D d'affixe $z_D = 2\sqrt{3} - 2i$.

   a) Ecrire z_D sous forme exponentielle.

   b) Construire le point D dans la figure 2.

3. Soit I le point d'affixe $z_I = (\sqrt{3}-3) + i(\sqrt{3}+1)$.

   a) Vérifier que $z_D - z_I = (3+\sqrt{3})(1-i)$.

   b) Montrer que I est le projeté orthogonal de D sur la droite (AC).

   c) Construire le point I.

4. Soit J le projeté orthogonal de D sur la droite (BC).

   a) Justifier que le triangle ABC est rectangle en C.

   b) Montrer que le quadrilatère CIDJ est un rectangle.

   c) En déduire l'affixe du point J.

Exercice 3 (4.5 points)

1. a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\dfrac{1}{1+t} \leq 1$.

   b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

2. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\ln(1+e^{2t}) = 2t + \ln(1+e^{-2t})$.

On considère les intégrales $A = \displaystyle\int_2^3 te^t\,dt$ et $B = \displaystyle\int_2^3 e^t \ln(1+e^{2t})\,dt$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A = 2e^3 - e^2$.

4. a) Montrer que $B - 2A \geq 0$.

   b) En utilisant la question 1.b), montrer que $B - 2A \leq e^{-2} - e^{-3}$.

   c) En déduire que $65.56 < B < 65.65$.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(x+2)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

I) 1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Montrer que la droite $\Delta : y=x$ est une direction asymptotique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x>-2$, $f'(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-2,+\infty[$ exactement deux solutions α et β telles que $\alpha<-1$ et $1.1<\beta<1.2$.

3. a) Etudier la position relative de (C_f) et Δ.

b) Tracer la courbe (C_f).

4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite Δ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\beta$.

Montrer que $\mathcal{A}=\beta^2+\beta-1$.

II) Soit la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0=0, \\ u_{n+1}=f(u_n), \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq-1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. On considère la suite (v_n) définie sur IN par $v_n=(2+u_0)\times(2+u_1)\times\ \dots\ \times(2+u_n)$.

a) Justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\ln(2+u_k)=u_k-u_{k+1}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ln(v_n)=-u_{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

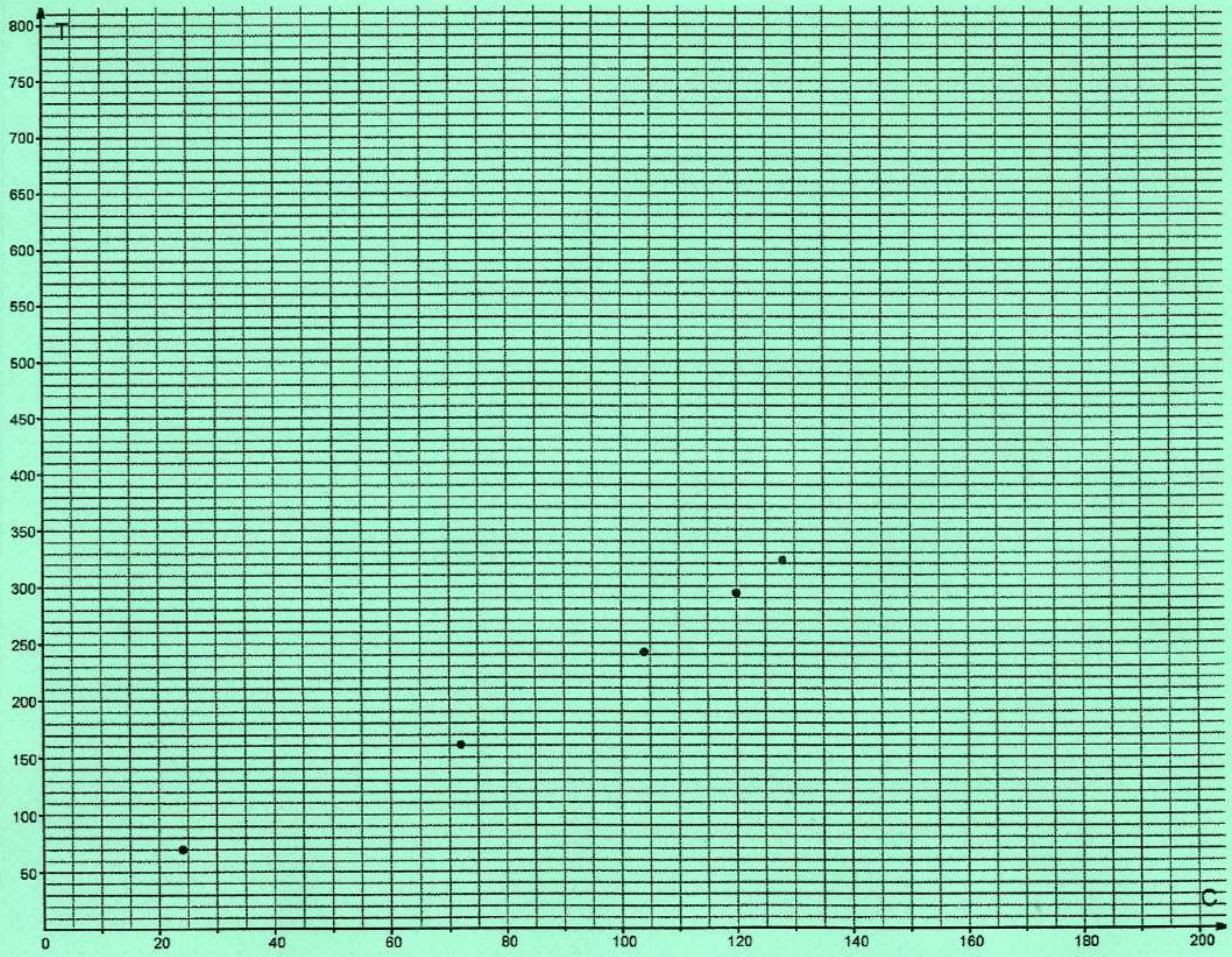
Signatures des surveillants

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session de contrôle (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2